Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА
и начала математического анализа

11 класс

дрофа

Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА

и начала математического анализа

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Рекомендовано
Министерством образования
и науки
Российской Федерации

6-е издание, стереотипное

11 класс

Москва
Дрофа
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М91

Муравин, Г. К.
М91 Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2013. — 253, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-358-12780-7

Учебник по курсу алгебры и началам математического анализа соответствует программе по математике для общеобразовательной школы.

Теоретический материал разделен на обязательный и дополнительный. Каждый пункт главы содержит упражнения, контрольные вопросы и задания.

Упражнения и домашние контрольные работы дифференцированы по уровню сложности. В книге имеется раздел «Ответы. Советы. Решения», в котором автор рассматривает решение наиболее трудных задач.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-358-12780-7

Оглавление

ГЛАВА

1

Непрерывность и пределы функций

ГЛАВА

2

Производная функции

ГЛАВА

3

Техника дифференцирования

ГЛАВА

4

Интеграл и первообразная

ГЛАВА

5

Уравнения, неравенства и их системы

ГЛАВА

6

Комплексные числа

Уважаемые одиннадцатиклассники!

В этом году вы завершаете изучение школьного курса математики. Авторы постарались помочь вам как в изучении нового материала, так и в повторении изученного ранее. Знать математику — это значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ. Задач в учебнике много, и они разной степени трудности.

В задачах, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений.

Значком «$^{\circ}$» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с некоторыми техническими сложностями.

Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «$^{\bullet}$». План решения таких задач полезно обсудить в классе с учителем.

Символом «*» обозначены самые трудные задачи.

Значком «■» отмечены несколько задач, которые не следует решать без калькулятора.

Кроме основного материала, изучение которого обязательно, в учебнике помещен и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается «▼», а конец — «△».

В разделе «Основные формулы» в конце учебника вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике.

Если задача не получается — ее решение или полезный совет вы найдете в разделах «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к каждой главе предлагается домашняя контрольная работа с указанием примерного времени, на которое рассчитано ее выполнение.

Задания каждой из домашних контрольных работ разбиты на 3 уровня, которые можно трактовать как удовлетворительный, хороший и отличный. Так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

Авторы желают вам успехов!

ГЛАВА

1

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

В первом пункте этой главы речь пойдет о различии между описательно-интуитивными и строгими математическими определениями, во втором пункте вы познакомитесь с важнейшим математическим понятием предела функции, а в третьем пункте вычисление пределов позволит более точно строить графики функций.

1. Непрерывность функций

В 10 классе вы познакомились с терминами «непрерывность функции», «промежуток непрерывности функции» и «точка разрыва функции». На рисунке 1 изображен график *непрерывной функции* $y = x^2$.

Кусочно-заданная функция $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (рис. 2),

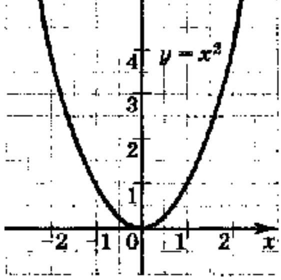


Рис. 1

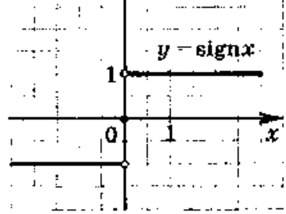


Рис. 2

известная в математике как функция $y = \operatorname{sign} x$[1], имеет разрыв в точке $x = 0$.

Первый из графиков можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги, а при изображении второго карандаш придется оторвать. Именно на этом основывалось начальное представление о непрерывности функций, которым вы пользовались в 10 классе. Так, в частности, свойство сохранять знак, которым обладает непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на промежутке, позволяло решать неравенства методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{\log_2(2x+3) - 3} \leqslant 0$.

Решение.

(1) Найдем границы промежутков знакопостоянства функции, заданной левой частью неравенства. К этим границам относятся нули числителя, нуль знаменателя, и, конечно, сами промежутки должны входить в ОДЗ неравенства (область допустимых значений переменной x). ОДЗ: $\log_2(2x + 3) - 3 \neq 0$,

$\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3 \neq 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1{,}5, \\ x \neq 2{,}5. \end{cases}$ Нули числителя: $x^2 - 3x - 4 = 0$,

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Нуль знаменателя: $x = 2{,}5$.

(2) Отметим найденные границы с учетом нестрогости данного неравенства (рис. 3, *а*).

(3) Определим знаки функции на отмеченных промежутках и проведем кривую знаков.

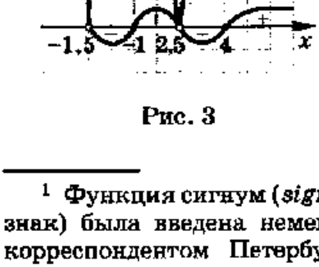


Рис. 3

На самом правом промежутке положителен и числитель, и знаменатель дроби, а при переходе через точки 4, 2,5 и −1 или числитель, или знаменатель свой знак изменяют, что влечет изменение знака функции (рис. 3, *б*).

Ответ. $-1{,}5 < x \leqslant -1$; $2{,}5 < x \leqslant 4$.

Образных представлений о непрерывности было вполне достаточно для решения различных задач, пока речь шла об элементарных

[1] Функция сигнум (*sign* — сокращение латинского слова *signum* — знак) была введена немецким математиком, иностранным членом-корреспондентом Петербургской академии наук Л. Кронекером в 1878 г.

функциях[1]. Однако переход к более сложным числовым функциям заставил математиков задуматься над проблемой строгости своей науки, и, в частности, сформулировать определения на математическом языке. Так, как сформулировано, например, определение возрастающей функции:

*функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на множестве S, если для любых двух чисел x_1 и x_2, принадлежащих этому множеству, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.*

В отличие от этого определения, основанного на простом сравнении чисел, говоря о непрерывности, мы оперируем неким описательным понятием *возможности изображения карандашом*. Однако здравый смысл подсказывает, что уже первый из упомянутых в этом пункте графиков, график функции $y = x^2$, изобразить карандашом нельзя, поскольку он бесконечен, а изображаем мы лишь его часть. Но если график вообще нельзя изобразить, то вопрос о том, как именно его нельзя изобразить, отрывая или не отрывая карандаш от бумаги, звучит несколько странно.

Попробуем обойти проблему бесконечности, рассматривая графики функций на небольших участках, т. е. в ближайших окрестностях точек графика.

В точке x_0 функция $y = f(x)$ может оказаться непрерывной (рис. 4) или иметь в ней разрыв (рис. 5).

На рисунке 4 точка $M(x; y)$, изображающая острие грифеля карандаша, двигаясь по графику функции, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0; y_0)$. При этом все меньше и меньше будут отличаться друг от друга, как абсцис-

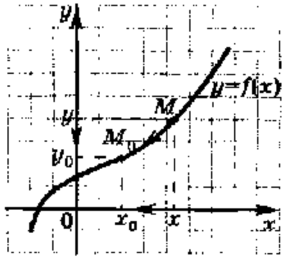


Рис. 4

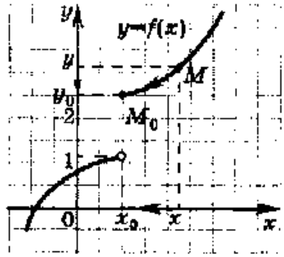


Рис. 5

[1] Напомним, что к элементарным относятся функции, задаваемые формулами, содержащими степени, радикалы, логарифмы, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также дроби и арифметические знаки действий.

сы точек M и M_0, так и их ординаты. Заметим, что абсциссы точек M и M_0 отличаются на $|x - x_0|$, а их ординаты на $|y - y_0|$ (модули здесь поставлены, чтобы учесть возможность приближения к точке M_0 с другой стороны, чем изображено на рисунке). Изменяя абсциссу точки M, мы можем так уменьшить значение $|x - x_0|$, что соответствующее значение $|y - y_0|$ станет как угодно малым, т. е. меньшим, чем любое заранее заданное положительное число. На этом и основывается строгое математическое определение непрерывности функции в точке:

*функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*[1].

Это определение было предложено знаменитым французским математиком Огюстеном Луи Коши[2] в 20-е годы XIX в.

Пример 2. Доказать, что функция $y = 2x + 3$ непрерывна в любой точке x_0.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε нам нужно найти такое число δ, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следовало неравенство $|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon$.

Преобразуем последнее неравенство:

$$|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 2x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon$, что и означает, согласно определению, непрерывность функции $y = 2x + 3$ в точке x_0.

Примерно по такой же схеме доказывается факт непрерывности любой из элементарных функций в любой точке области ее определения, который мы приняли без доказательства.

▼ Пример 3. Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$.

---

[1] Знак следования «$\Rightarrow$» использован здесь в том же смысле, что и в 10 классе, когда шла речь о следовании и равносильности. А вообще, $A \Rightarrow B$ значит в точности то же, что и знакомая конструкция теорем: «Если верно утверждение A, то верно и утверждение B».

[2] О. Коши опубликовал это определение в 1823 г., однако на шесть лет раньше его сформулировал чешский математик Б. Больцано, чьи труды стали известны значительно позже работ Коши.

Доказательство. Нужно найти, каким следует брать число δ, чтобы для любого x, такого, что $|x-1|<\delta$, выполнялось неравенство $|x^2-1|<\varepsilon$.

$$|x^2-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x-1)(x+1)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1||x+1|<\varepsilon.$$

Можно сразу ограничиться рассмотрением значений x из единичной окрестности точки $x_0=1$: $0<x<2$. Для любого из таких значений $|x+1|<3$. С учетом этого, для любого $\varepsilon>0$, взяв $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, получим: $|x-1|<\delta \Rightarrow |x-1||x+1|<\delta|x+1| \Rightarrow$ $\Rightarrow |x-1||x+1|<3\delta \Leftrightarrow |x^2-1|<\varepsilon$. △

Замечание. Определение непрерывности функции в точке неприменимо, когда речь идет о границах отрезка, являющегося областью определения функции. Действительно, при $x<a$ и при $x>b$ (рис. 6) неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, где $D(f)=[a;b]$, теряет смысл, так как не определена сама функция $y=f(x)$.

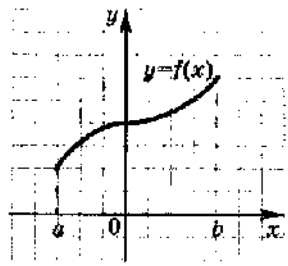


Рис. 6

В таких точках можно говорить только об *односторонней* непрерывности, убирая в определении непрерывности модуль из неравенства $|x-x_0|<\delta$. При этом соответствующая часть определения будет выглядеть так: $0\leqslant x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ (непрерывность справа) или так: $0\leqslant b-x<\delta \Rightarrow |f(x)-f(b)|<\varepsilon$ (непрерывность слева).

С учетом сделанного замечания будем считать, что *функция, непрерывная во всех точках промежутка, является на этом промежутке непрерывной.*

На рисунке 5 легко видеть, что в точке x_0 функция не является непрерывной — как бы близко слева от этой точки мы ни брали x, разность $f(x)-f(x_0)$ останется больше некоторого положительного числа, большего 1.

Поскольку элементарные функции непрерывны на любом промежутке, входящем в область определения, они могут иметь разрывы только в точках, ограничивающих область определения. Вернемся к рисунку 5, на котором график функции $y=f(x)$ имеет разрыв при $x=x_0$. Функция совершает скачок в точке x_0. Как бы близко слева от этой точки мы ни брали значение x, значение $|f(x_0)-f(x)|$ останется больше некоторого положительного числа. Это значит, что для точки x_0 не выполняется определение непрерывности функции.

На рисунках 7 и 8 показаны графики функций, имеющие разрыв в точке x_0, которая не входит в область определения. Однако при этом в некоторой окрестности слева и справа от точки x_0 функции определены.

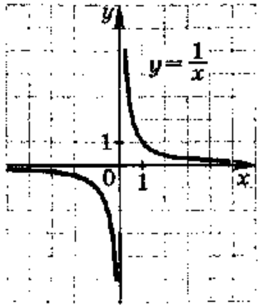


Рис. 7

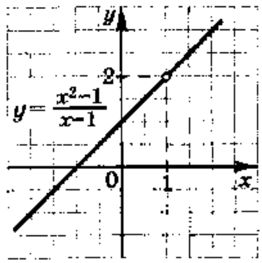


Рис. 8

*Точку x_0, входящую в область определения функции, называют **точкой разрыва** функции, если функция в ней не является непрерывной.*

*Точку x_0, не входящую в область определения функции, называют **точкой разрыва** функции, если и слева, и справа от нее как угодно близко к точке x_0 есть точки, в которых функция определена.*

На рисунке 7 хорошо вам известная гипербола $y = \dfrac{1}{x}$, а на рисунке 8 вы видите график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, который при всех x, кроме $x = 1$, совпадает с графиком линейной функции $y = x + 1$. Подумайте, почему в отличие от *бесконечного разрыва* функции $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ разрыв функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 1$ называют *устранимым*.

Пример 4. Устранить разрыв функции $y = \dfrac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$.

Решение. Данная функция имеет разрыв в точке $x = 1$. Устранить разрыв — это значит найти непрерывную функцию, которая совпадает с данной функцией во всех точках, кроме точки разрыва.

Преобразуем дробь, задающую функцию, рассматривая ее числитель как квадратный трехчлен относительно $\sqrt{x}$:

$$\frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.$$

Функция $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$ совпадает с функцией $y = \dfrac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$ при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, и является элементарной, а значит, непрерывной во всех точках своей области определения, в частности в точке $x = 1$.

Ответ: $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$.

Упражнения

1. Среди указанных функций назовите функции, имеющие разрывы. Укажите точки разрыва:

а) $y = x^5 + x^3 + 7$;

б) $y = 5x + \frac{1}{x}$;

в) $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$;

г) $y = 3^x + \lg x$;

д) $y = \operatorname{tg} x$;

е) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 2x \text{ при } x > 0; \end{cases}$

ж) $y = \frac{|x+5|}{2^x}$;

з) $y = \sin x - \cos^2 x$;

и) $y = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x < -1, \\ x^2 \text{ при } -1 \leqslant x < 2, \\ 5 - x \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$

2. Сформулируйте условие, достаточное для того, чтобы непрерывная функция имела нуль на отрезке $[a; b]$.

● Используйте это условие для составления плана поиска приближенного значения корня уравнения $x^3 - 2x^2 - 8x - 12 = 0$ на отрезке $[4; 5]$.

■ Действуя по составленному плану, найдите с помощью калькулятора корень с точностью до 0,01.

3. Решите методом интервалов неравенства:

а) $(x^2 - 4)(x^2 - 9) > 0$;

б) $\frac{(x-1)(x+2)}{2x-1} < 0$;

в) $\frac{3x^2 - 2x - 1}{4 + 3x - x^2} > 0$;

г) $\frac{\sqrt{2x-5}}{x+3} < 0$.

4. Приведите примеры функций, непрерывных:

а) на множестве действительных чисел;

б) при всех значениях x, кроме $x = 4$;

в) при всех значениях x, кроме x, равных 1; 2 и 3.

5°. В результате каких преобразований из графика функции $y = f(x)$ получится график функции:

а) $y = f(kx + b)$;

б) $y = kf(x) + b$;

в) $y = -f(x)$;

г) $y = |f(x + a)|$;

д) $y = f(|x|)$;

е) $y = |f(|x|)|$?

6. Постройте графики следующих функций:

а) $y = 2x^2 - 1$;

б)● $y = |2^x - 2|$;

в) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

г)● $y = |2\cos x| + 1$;

д)● $y = |\log_2|x - 2||$;

е)● $y = (|x| - 2)^2$.

7. На рисунке 9, *а—з* изображены графики функций.

1) Какие из этих функций:

а) имеют разрывы; б) имеют устранимые разрывы?

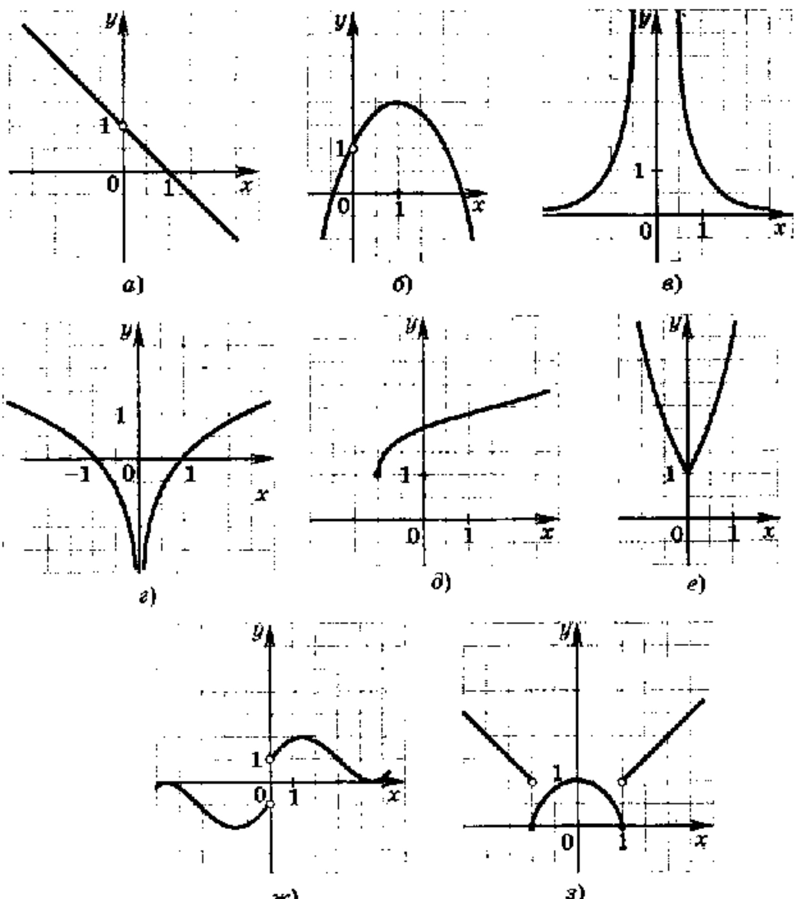


Рис. 9

2)• Найдите для каждого графика соответствующую ему функцию из следующего списка: $y = (|x| + 1)^2$, $y = \sin x + \frac{|x|}{x}$,

$y = \frac{x - x^2}{x}$, $y = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ |x| \text{ при } |x| > 1, \end{cases}$ $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 1 + \sqrt{x + 1}$,

$y = \log_2 |x|$, $y = \frac{x + 2x^2 - x^3}{x}$.

8•. Вы знаете определение модуля: $|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$ **Есть ли отличия у функций $y = |x|$ и $y = x \cdot \operatorname{sign} x$? Можно ли задать функцию сигнум так: $\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x}$?**

9. Как называется $|x - x_0|$, если x_0 — приближенное значение x?

10°. Укажите самый большой числовой интервал, все точки которого удовлетворяют неравенству:

а) $\left|x - \frac{3}{7}\right| < 0{,}01$;

б) $\left|x + \frac{5}{11}\right| < 0{,}001$;

в) $|x - 1| < \delta$;

г) $|x - x_0| < \delta$;

д)• $|x - \pi| < 0{,}00001$.

11. Запишите в виде $|x - x_0| < \delta$ двойное неравенство:

а) $-1 < x < 1$;

б) $0 < x < 2$;

в) $-2 < x < 0$;

г) $1 < x < 3$;

д) $-2 < x < 1$.

12. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности на координатной прямой, решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x - 2| < 0{,}6, \\ |x - 1| < 0{,}7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x + 2| < 0{,}7, \\ |x + 1| < 0{,}6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x - 2| > 0{,}6, \\ |x - 1| < 0{,}7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x + 2| < 0{,}6, \\ |x + 1| > 0{,}7. \end{cases}$

13•. Докажите, что линейная функция:

а) $y = 2 - 5x$; б) $y = kx + l$ непрерывна в любой точке x_0.

14•. Докажите, что функция $y = 3x + |x|$ непрерывна: а) в точке $x_0 = 0$; б) в любой точке x_0.

15•. Докажите, используя определение непрерывности, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x = 0$.

16. Устраните разрыв функции:

а) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2}{x^2}$;

б) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;

в)° $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{3 - x}$;

г) $y = \dfrac{(x^2 + x - 2)(x + 3)}{x^2 + 2x - 3}$;

д) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

е)° $y = \dfrac{64 - x^2}{2 - \sqrt[3]{x}}$.

17. Найдите область определения и точки разрыва функции:

а) $y = \dfrac{2x + 6}{x^2 - 9}$;

б) $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 2x^2 - 8x}$;

в) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}$;   д) $y = \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$;

г) $y = \dfrac{1}{1-x}$;   е) $y = \dfrac{1-x}{1-\sqrt[4]{x}}$.

• Есть ли среди разрывов: а) бесконечные; б) устранимые?

18•. Задайте формулой функцию, совпадающую с функцией $y = 3^x$ во всех точках, кроме $x = 2$.

19•. Докажите, что функция Дирихле[1] $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in Q, \\ 0 \text{ при } x \in I, \end{cases}$

где Q — множество рациональных чисел, I — множество иррациональных чисел, разрывна в каждой точке.

20*. Докажите, что функция Римана[2] $y = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \text{ при } x = \dfrac{p}{q}, \\ 0 \text{ при } x \in I, \end{cases}$

где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$ и дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима, разрывна в любой рациональной точке и непрерывна в любой иррациональной точке ($\boldsymbol{Z}$ — множество целых, а $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел).

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте известные вам свойства функций, связанные с их непрерывностью.

2. Изобразите график функции, имеющей в точке $x_0 = 1$: а) бесконечный разрыв; б) устранимый разрыв. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, имеющую устранимый разрыв в этой точке, и функцию, которая получится после устранения этого разрыва.

3. Решите неравенство $\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-x-2} \leqslant 0$.

---

[1] *Петер Дирихле* (1805—1859) — немецкий математик, основные труды которого посвящены механике и математической физике. В нашем курсе используется его определение понятия функции.

[2] *Бернард Риман* (1826—1866) — немецкий математик, учился, а с 1857 г. и преподавал в Гёттингенском университете. В 33 года Риман стал профессором этого университета, в 40 лет умер от туберкулеза. Полное собрание его трудов составило около 500 страниц, которые легли в основу курсов математической физики, электричества и магнетизма, а также математики. Заметим, что Риман слушал лекции Дирихле в Берлинском университете в 1847—1849 гг.

2. Предел функции

Функции, графики которых изображены на рисунках 10 и 11, отличаются только значением или отсутствием значения в точке x_0. Точка $M(x; y)$, двигаясь по любому из графиков, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0; y_0)$. Независимо от того, принадлежит ли точка M_0 графику функции (как на рис. 10) или нет (как на рис. 11), при приближении абсциссы точки M к x_0 ее ордината $f(x)$ становится как угодно близка к y_0. Можно сказать, что, когда x *стремится* к x_0, $f(x)$ *стремится* к y_0.

Слово «стремится» в русском языке обычно означает процесс приближения к некоторой цели, но не само ее достижение. Точно так же «*x стремится к x_0*» означает, что x принимает значения как угодно близкие, *но не равные* x_0. Правда, по отношению к $f(x)$ такого ограничения нет — в процессе своего *стремления* $f(x)$ может принимать значения, равные y_0.

В ситуации, когда при стремлении x к x_0 $f(x)$ стремится к y_0, математики обычно говорят о *пределе* и пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

(читается: «*Предел $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, равен y_0*»)[1].

Условие существования предела функции в точке x_0 отличается от условия непрерывности дополнительным ограничением на значения x, которые, как мы отмечали, не могут равняться x_0, т. е. значения $|x - x_0|$ должны быть строго больше

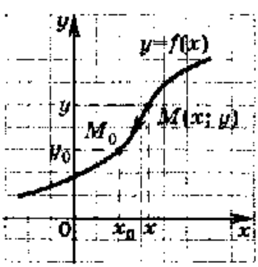


Рис. 10

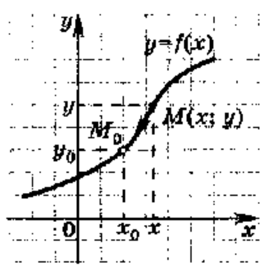


Рис. 11

[1] Обозначение lim — сокращение латинского слова *limes*, которое в переводе означает *граница, предел*. Слово limes для обозначения предела впервые применил И. Ньютон, символ же lim ввел французский ученый С. Люилье в 1786 г.

нуля. Кроме того, ордината y_0 точки M_0 может и не быть значением функции в точке x_0 (см. рис. 11).

С учетом этого определение предела выглядит так[1]:

функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный y_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Из схожести определений предела и непрерывности следует, что предел в точке x_0 имеют только функции, которые в этой точке или непрерывны, или имеют устранимый разрыв.

Заметим, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $y_0 = f(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (см. рис. 10). Верно и обратное утверждение: если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Если же в точке x_0 функция имеет устранимый разрыв (см. рис. 11), то при вычислении предела в этой точке его сначала устраняют, т. е. заменяют функцию $y = f(x)$ функцией $y = \varphi(x)$, непрерывной в точке x_0, а в других точках совпадающей с $y = f(x)$. После чего находят $y_0 = \varphi(x_0)$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos 2x + 1}{\sin x}$.

Решение. В точке $\frac{\pi}{6}$ элементарная функция $y = \dfrac{\cos 2x + 1}{\sin x}$ определена и, значит, непрерывна:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x + 1}{\sin x} = \frac{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{0,5 + 1}{0,5} = 3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$.

Решение. Число 2 не входит в область определения функции $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$, при этом значении x в нуль обращаются и знаменатель, и числитель дроби. Преобразуем эту дробь:

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2(x - 2)(x + 0,5)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2(x + 0,5)}{x + 2}.$$

[1] Такое определение предела на «языке ε, δ» встречается уже в 1880 г. у немецкого математика К. Вейерштрасса.

Функция $y = \dfrac{2(x+0{,}5)}{x+2}$ непрерывна в точке $x = 2$, а во всех других точках своей области определения совпадает с функцией $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$. Значит:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+0{,}5)}{x+2} = \frac{2(2+0{,}5)}{2+2} = \frac{5}{4}.$$

Примечание. Обычно решение оформляется так:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+0{,}5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+0{,}5)}{x+2} =$$

$$= \frac{2(2+0{,}5)}{2+2} = \frac{5}{4}.$$

Рассматривая непрерывность функций в точках, ограничивающих ее область определения, мы ввели понятие односторонней непрерывности. По тем же соображениям следует говорить об *одностороннем*, *правом пределе*, например, функции $y = \sqrt{x}$ при x, стремящемся к нулю (рис. 12).

▼ Как и в случае с односторонней непрерывностью, разница в определениях предела и одностороннего предела заключается в наличии или отсутствии модуля, например:

*функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 **правый предел**, равный y_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon. \ \triangle$$

Чтобы отличать обозначение одностороннего от обозначения *двустороннего* предела, вверху справа от x_0 ставят знак «−» для левого и знак «+» для правого предела, например $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$. Левый и правый пределы функции в точ-

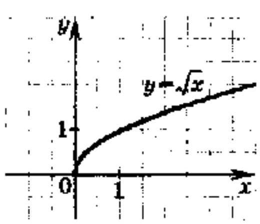


Рис. 12

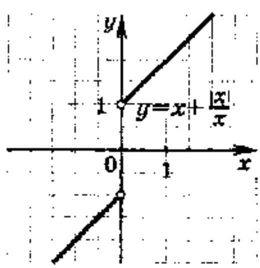


Рис. 13

ке x_0 могут и не совпадать, так, например, для функции $y = x + \frac{|x|}{x}$ (рис. 13) имеем:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}(x+1) = 0 + 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = 0 - 1 = -1.$$

Понятно, что двусторонний предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(x + \frac{|x|}{x}\right)$ не существует.

▼ В определениях возрастания, непрерывности и предела функции, да и вообще в математических текстах, часто используются слова «все», «для всякого», «каким бы ни был», «любой». Для лучшего зрительного восприятия (и экономии места и времени) математики договорились использовать вместо них специальный символ — *квантор общности* «$\forall$», который представляет собой перевернутую букву «**A**», первую букву английского слова *all* — все, всё. Аналогично, слова «существует», «найдется» заменяют *квантором существования* «$\exists$» — перевернутая буква «**E**», первая буква английского слова *exists* — существует[1].

Так, например,

$$\exists y_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ такое, что } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon \text{ —}$$

это условие, определяющее существование левого предела в точке x_0. △

Упражнения

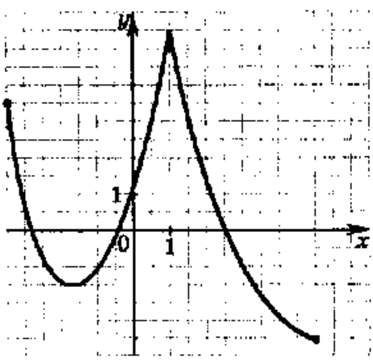


Рис. 14

21. С помощью графика функции $y = f(x)$ (рис. 14) найдите:

а) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 3,5} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

В каждой ли точке области определения данная функция имеет предел?

---

[1] В конце XIX в. независимо друг от друга американский математик Ч. Пирс и немецкий математик Ф. Фриге ввели понятие квантора.

22•. Используя определение предела, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$; б) $\lim\limits_{x \to 4} (0{,}5x + 2) = 4$.

Какое свойство элементарных функций позволяет быстро находить такие пределы?

23. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 - 1)$; г) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{2^x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 6x + 9)$; д) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2\operatorname{tg} x)$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$; е) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{6}} \dfrac{3 - 2x}{6x + 1}$.

24. 1) Какая из функций, графики которых изображены на рисунке 15 (*а—е*), имеет предел при $x \to 2$?

2) Если функция имеет предел, то чему он равен?

3) Какие из функций: не имеют разрывов, имеют разрывы, имеют устранимый разрыв?

25○. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$; б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$;

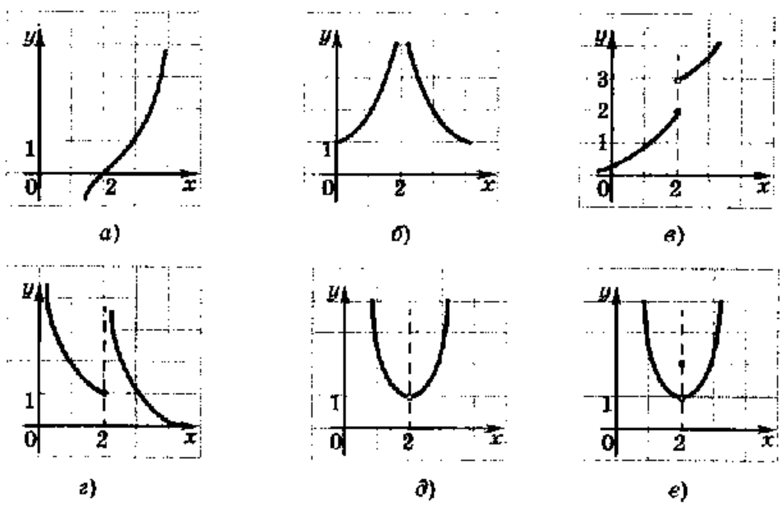


Рис. 15

в) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4-1}{x^2+3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

е)● $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$.

26. Имеют ли в точке a пределы следующие функции:

а) $y=\dfrac{x^2}{3}$, $a=0$;

б) $y=\dfrac{2}{3-x}$, $a=3$;

в)○ $y=|x-1|$, $a=1$;

г)● $y=\dfrac{|x|}{3x}$, $a=0$?

27. Изобразите график какой-нибудь функции $y=f(x)$, если:

а) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$;

б) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-2$;

в) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

28●. Какие из следующих утверждений верны:

а) непрерывная функция имеет предел в каждой точке области определения;

б) непрерывная функция может не иметь предела в некоторой точке области определения;

в) функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

г) разрывная функция не имеет предела в точке разрыва;

д) разрывная функция может иметь предел в точке разрыва;

е) разрывная функция имеет предел в точке разрыва, только когда он устранимый?

29. С помощью графиков функций (рис. 16, *а—е*) ответьте на следующие вопросы.

а) Какие функции имеют двусторонние пределы в точке $x_0=2$?

б) В каких точках функция имеет односторонние пределы?

в) Найдите предел функции в точке $x_0=2$, если он существует.

30●. Найдите односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 \text{ при } x\leqslant 1,\\ 3x-5 \text{ при } x>1\end{cases}$ при $x\to1$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ при $x\to1$.

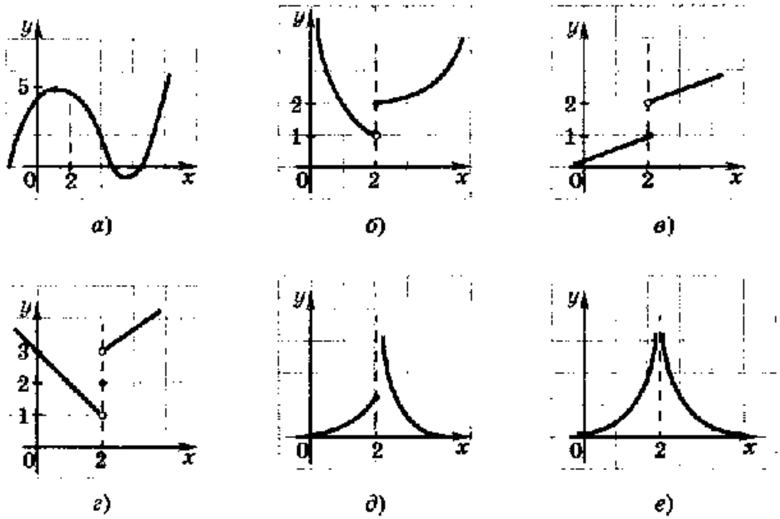


Рис. 16

31●. Запишите с помощью кванторов определение функции, непрерывной:

а) в точке x_0;

б) справа в точке x_0;

в) слева в точке x_0.

32●. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists a\ \forall x \in D(f),\ f(x) < a$.

1) Запишите с помощью кванторов определение функции *ограниченной снизу*, т. е. такой функции, все значения которой больше некоторого числа.

2) Будет ли условие $\exists a\ \forall x \in D(f),\ f(x) < a$ по-прежнему определять функцию, ограниченную сверху, если кванторы в нем поменять местами:

а) $\forall x \in D(f)\ \exists a,\ f(x) < a$;

б) $\forall a\ \exists x \in D(f),\ f(x) < a$?

3) Сформулируйте определение функции, которая не является ограниченной сверху.

33●. Имеет ли предел при x, стремящемся к b, функция $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \lim\limits_{x \to b} q(x)$ и $\forall x,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant q(x)$?

Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличаются определения непрерывности и предела функции в точке?

2. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ имеет левый и правый пределы в точке b, то существует $\lim\limits_{x \to b} f(x)$?

3. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 9 пункта 1:

а) имеют предел в каждой точке; б) имеют односторонний предел в каждой точке?

4. Найдите предел, если он существует:

а) $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x \leqslant 1, \\ 3x - 5, & x > 1 \end{cases}$ при $x \to 1$;

б) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x + 1|}$ при $x \to -1$.

3. Асимптоты графиков функций

Функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$ (рис. 17) как элементарная является непрерывной во всех точках, кроме нуля. Однако, чем ближе к нулю, тем чаще она пробегает все свои значения, т. е. числа от -1 до 1. Значит, в нуле у этой функции нет ни двустороннего, ни односторонних пределов. Действительно, какое бы число мы ни предложили на роль y_0 из определения предела, при $\varepsilon = 0{,}5$ в любой, как угодно малой, δ-окрестности нуля найдется значение $\sin \dfrac{1}{x}$, равное либо 1, либо -1, которое не будет удовлетворять неравенству $\left|\sin \dfrac{1}{x} - y_0\right| < 0{,}5$.

Примерно такие же рассуждения позволяют доказать, что *функция не может иметь двух разных двусторонних пределов при x стремящемся к x_0*.

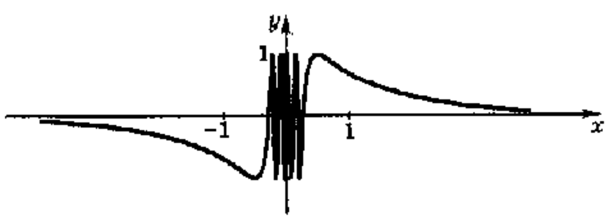


Рис. 17

▼ Докажем это методом «от противного». Пусть при стремлении x к x_0 функция $y = f(x)$ имеет два различных предела a и b. Возьмем ε равным $\frac{|a-b|}{3}$. Тогда можно подобрать такое значение δ, что $f(x)$ окажется одновременно на расстоянии, меньшем ε и от a, и от b. Однако при указанном выборе ε это невозможно, так как $f(x)$ не может быть ближе и к a, и к b одновременно (рис. 18).

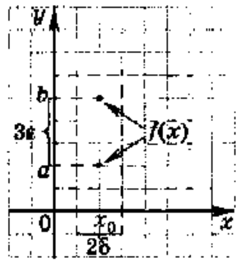


Рис. 18

Мы пришли к противоречию, означающему, что предположение о существовании двух пределов неверно. △

Можно, и даже не очень сложно, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

Должны, конечно, существовать пределы в правых частях равенств, а в третьем равенстве, кроме того, должен отличаться от нуля предел, стоящий в знаменателе.

В дальнейшем эти три формулы будут нужны, поэтому полезно запомнить краткие формулировки соответствующих правил:

предел суммы [*произведения, частного*] *равен сумме* [*произведению, частному*] *пределов.*

Вернемся к функции $y = \sin\frac{1}{x}$. При неограниченном удалении точек графика от оси ординат они приближаюся к оси абсцисс, график как бы сливается с осью абсцисс, которая является его горизонтальной асимптотой. Говорят, что функция $y = \sin\frac{1}{x}$ имеет предел, равный нулю, при x, *стремящемся к бесконечности*: $\lim\limits_{x \to \infty} \sin\frac{1}{x} = 0$. С помощью кванторов это можно выразить так: $\forall\varepsilon > 0\ \exists a$ такое, что $|x| > a \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

В математике обозначение предела иногда используют и в ситуациях, когда функция никакого предела не имеет. Так, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ означает, что при x, стремящемся к нулю, значения $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастают по модулю, т. е., что $\left|\frac{1}{x}\right|$ становится (и остается) больше любого заданного числа: $\forall b \exists \delta$ такое, что $|x|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|>b$. Подобно этому, запись $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$ говорит о неограниченном возрастании значений выражения x^2 при x, стремящемся к бесконечности[1]: $\forall b \exists a$ такое, что $|x|>a \Rightarrow x^2>b$. Введенное обозначение позволяет записать условие существования вертикальной асимптоты $x=a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}$.

Решение. При x, стремящемся к бесконечности, и числитель, и знаменатель дроби неограниченно возрастают. Вообще говоря, эта ситуация неопределенная. Однако, разделив числитель и знаменатель на x^3, мы получим тождественно равное выражение $\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}$, поведение которого при стремлении x к бесконечности вполне понятно: каждая из трех дробей в числителе при неограниченном увеличении модуля ее знаменателя стремится к нулю, значит, и весь числитель стремится к нулю (предел суммы равен сумме пределов). По аналогичным соображениям, знаменатель стремится к числу 3. Понятно, что вся дробь при этом стремится к нулю (предел частного равен частному пределов):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}=0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{3x^3+4x^2-2x}$.

[1] Символ бесконечности (∞) впервые использовал английский математик Джон Валлис в 1665 г. в работе «Арифметика бесконечного». Существует мнение, что знак бесконечности противопоставлялся автором нулю и представлял собой два связанных между собой нуля.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{3x^3 + 4x^2 - 2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}}{3 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Полученный ответ позволяет сделать вывод о том, что функция $y = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{3x^3 + 4x^2 - 2x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \dfrac{2}{3}$.

По аналогии с горизонтальной асимптотой можно ввести и понятие *наклонной* асимптоты — прямой $y = kx + b$, с которой при неограниченном увеличении x сливается график функции $y = f(x)$:

прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$, то вертикальной асимптотой графика этой функции является прямая $x = -1$.

Для решения вопроса о горизонтальной асимптоте устремим x к бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1 + \dfrac{1}{x}} = \infty$. Предела не существует, значит, у функции нет горизонтальных асимптот.

Нахождение наклонных асимптот несколько сложнее. Преобразуем сначала выражение $\dfrac{x^2}{x+1}$: $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \dfrac{x^2 - 1}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} = (x - 1) + \dfrac{1}{x+1}$. Первое слагаемое задает линейную функцию, а второе при стремлении x к бесконечности стремится к нулю.

Имеем: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - (x - 1)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, значит, функция $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$.

Информация об асимптотах позволяет более точно изобразить график функции (рис. 19).

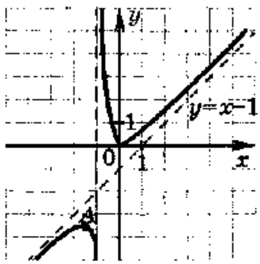


Рис. 19

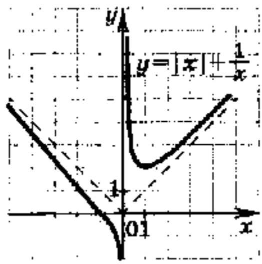


Рис. 20

Заметим, что на промежутке $(-1; +\infty)$ значения функции неотрицательны, поэтому в точке $x = 0$ функция принимает свое наименьшее на этом промежутке нулевое значение.

Нельзя, правда, пока определить координаты точки A, абсцисса которой разделяет промежутки возрастания и убывания функции — этому вы научитесь в следующих главах нашего учебника.

Замечание. Графики некоторых функций могут иметь две наклонных асимптоты. Например, прямые $y = x$ и $y = -x$ — наклонные асимптоты графика функции $y = |x| + \frac{1}{x}$ (рис. 20).

Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x| + \frac{1}{x} - x\right) = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x| + \frac{1}{x} - (-x)\right) = 0$.

▼Пример 4. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5}$.

Решение. Попытаемся, как и в предыдущем примере, выделить из данной дроби линейный двучлен. Здесь, однако, формулы сокращенного умножения нам помочь не смогут — придется делить числитель дроби на ее знаменатель в столбик. Алгоритм деления многочлена на многочлен очень похож на хорошо известное деление уголком одного натурального числа на другое:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^3 - 7x^2 + 4x - 3 & x^2 - 4x - 5 \\
\cline{2-2}
\underline{2x^3 - 8x^2 - 10x\phantom{{}-3}} & 2x + 1 \\
-\,x^2 + 14x - 3 & \\
\underline{x^2 - 4x - 5} & \\
18x + 2 &
\end{array}
$$

Сначала мы подобрали одночлен $2x$ так, чтобы, умножив его на старший член делителя, получить старший член делимого $2x^3$. Затем под делимым подписали произведение делителя на этот одночлен и вычли из делимого это произведение. После вычитания от делимого остался трехчлен $x^2 + 14x - 3$, для которого как для делимого мы повторили описанную процедуру: нашли одночлен 1, умножили на него делитель, подписали под делимым и вычли. В остатке получился двучлен $18x + 2$. На этом деление закончилось, так как нет одночлена, который в произведении с x^2 дал бы $18x$.

Итак, при делении $2x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ на $x^2 - 4x - 5$ в частном получилось $2x + 1$, а в остатке $18x + 2$, значит,

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5} = 2x + 1 + \frac{18x + 2}{x^2 - 4x - 5}.$$

Прямая $y = 2x + 1$ — наклонная асимптота графика функции $y = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5}$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x - 5} - (2x + 1)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{18x + 2}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{18}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = 0. \triangle$$

Упражнения

34. Известно, что $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \frac{2}{3}$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to1} 0{,}3f(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(x)}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1} (f(x) + g(x))$;

г) $\lim\limits_{x\to1} (f(x) \cdot g(x))$;

д) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to1} (f(x))^3$.

35°. 1) Докажите, что вблизи указанной точки значения функции неограниченно возрастают по модулю:

а) $y = \dfrac{1}{x - 3}$ при $x \to 3$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2}$ при $x \to 0$;

в) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ при $x \to 1$;

г) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 3)^2}$ при $x \to -3$.

2) Запишите уравнения вертикальных асимптот графиков указанных функций.

36. Выберите условие, при котором:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;

а) $\forall b \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow |f(x)| > b$;

б) $\forall \varepsilon > 0 \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

в) $\forall b \exists a$ такое, что $x > a \Rightarrow f(x) < b$;

г) $\forall \varepsilon > 0 \exists a$ такое, что $|x| > a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

37. Запишите с помощью кванторов, что:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

38. Приведите пример функции $y = f(x)$ такой, что:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

39. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, если:

а) $f(x) = (5x - 2)^{-1}$, $x_0 = \frac{2}{5}$;

б) $f(x) = (2x + 3)^{-5}$, $x_0 = -1{,}5$;

в)$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{(x - 4)^4}$, $x_0 = 4$;

г)$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x - 1)^5}$, $x_0 = 1$.

40. 1) Найдите предел функции y при x, стремящемся к бесконечности:

а) $y = \dfrac{1}{6x}$; в) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 3x - 1}$;

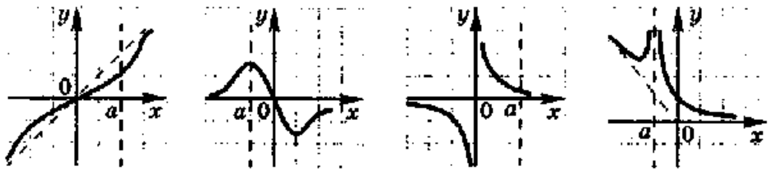
б) $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$; г)$^\bullet$ $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}$.

2) Запишите уравнения горизонтальных асимптот графиков данных функций.

41. Найдите наклонные асимптоты графика функции:

а) $y = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$; в)$^\bullet$ $y = \dfrac{4x^3 - x^2 + 2}{x^2 - 1}$;

б) $y = \dfrac{2x^2 + 4x - 3}{x - 2}$; г)$^\bullet$ $y = \dfrac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$.



а) б) в) г)

Рис. 21

42. По рисунку 21, на котором изображены графики функций, ответьте на вопросы.

1) Какой из графиков имеет: вертикальную, горизонтальную, наклонную асимптоты?

2) Какая из функций имеет предел при:

$x \to a$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$?

43°. Графики каких функций имеют: 1) вертикальную; 2) горизонтальную; 3) наклонную асимптоты:

а) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$; г) $y = \dfrac{2x}{x - 3}$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; д)$^\bullet$ $y = \dfrac{x^6 - 2x^3 + 4}{x^5 + x - 2}$;

в) $y = \dfrac{3}{x + 3}$; е)$^\bullet$ $y = \dfrac{x^4 - 5}{3 - x^4}$?

Запишите уравнения асимптот графиков функций.

44$^\bullet$. 1) Может ли график функции иметь горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$ и наклонную асимптоту при $x \to -\infty$?

2) Может ли график функции иметь:

а) две вертикальных и две наклонных асимптоты;

б) одну горизонтальную и две наклонных асимптоты;

в) три наклонные асимптоты?

Если может, сделайте его эскиз.

45. Закончите предложение:

а) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то график функции имеет ...

б) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, то график функции имеет ...

в) Если $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$, то график функции имеет ...

46. Запишите с помощью обозначения предела, что:

1) прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = g(x)$ в левой полуплоскости;

2) прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика в левой и в правой полуплоскостях;

3) прямая $x = 3$ является вертикальной асимптотой графика;

4) прямая $y = 3x - 1$ является наклонной асимптотой графика функции $y = g(x)$ в верхней и в нижней полуплоскостях?

47°. Изобразите график какой-нибудь функции, для которой выполняется условие:

а) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$;

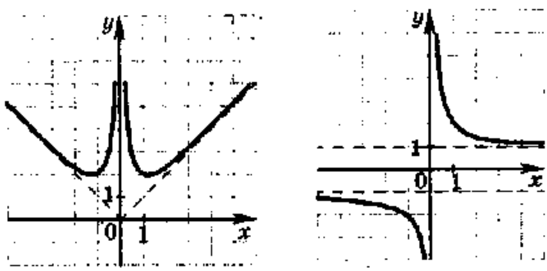
в) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} (f(x) - (2x - 3)) = 0$;

е) $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) + (2 - x)) = 0$.

48•. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке: 1) 22, *а*; 2) 22, *б*.



а) *б)*

Рис. 22

49•. Запишите с помощью обозначения предела:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a$ такое, что $x > a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

3) $\forall b\ \exists a$ такое, что $x > a \Rightarrow f(x) > b$;

4) $\forall b\ \exists a$ такое, что $x < a \Rightarrow f(x) > b$;

5) $\forall b\ \exists M$ такое, что $|x| > M \Rightarrow |f(x)| > b$.

50•. Что можно сказать о последовательности a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., если:

1) $\forall k, n \in N$, $n > k \Rightarrow a_n > a_k$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in N\ \forall n \in N,\ n > k \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$;

3) $\forall b \exists k \in N$ такое, что $a_k > b$;

4) $\forall b \exists k \in N\ \forall n \in N,\ n > k \Rightarrow a_n > b$?

Укажите какую-нибудь последовательность, для которой одновременно выполняются условия 1 и 2.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры использования обозначения предела, когда предел не существует.

2. Может ли график функции иметь и горизонтальную, и наклонную асимптоты?

3. Докажите, что прямая $y = 3x + 2$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

ГЛАВА

2

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Эта глава познакомит вас с возможностями, которые предоставляет для исследования функции знание углового коэффициента касательной к ее графику. В пункте 4 вы научитесь проводить касательные к графикам функций и записывать их уравнения. В пункте 5 угловой коэффициент касательной получит свое классическое название — производная, и станет понятно, почему производную называют скоростью изменения функции. В пункте 6 производная поможет находить промежутки возрастания и убывания функций.

4. Касательная к графику функции

На рисунке 23 к полуокружности радиуса 2 с центром в начале координат, представляющей собой график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$, проведена касательная. В курсе геометрии касательная к окружности обычно определяется как *прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку*. Однако для полуокружности такое определение касательной уже не подходит. Действительно, через точку M_0 можно провести бесконечно много прямых, имеющих с ней единственную общую точку (рис. 24).

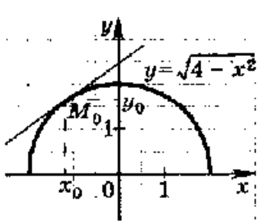


Рис. 23

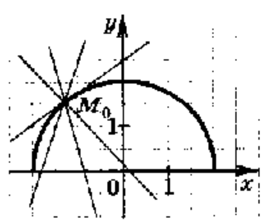


Рис. 24

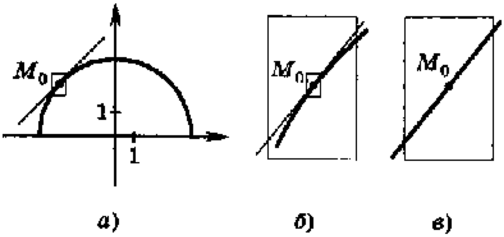


Рис. 25

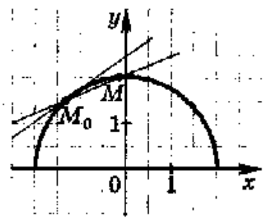


Рис. 26

Сформулируем определение касательной так, чтобы оно годилось не только для окружности и полуокружности, но и вообще для произвольной кривой.

Последовательно увеличивая масштаб изображения (рис. 25, *а—в*), мы видим, что вблизи своей точки M_0 график функции как бы *спрямляется*, сливается с касательной. Значит, с касательной сливается и секущая M_0M в знакомом вам из предыдущей главы процессе сближения точки $M(x;\ y)$ с точкой M_0 (рис. 26).

Касательная к кривой в ее точке M_0 — это предельное положение секущей M_0M, когда M стремится к M_0.

Понятно, что касательная к кривой не существует в точках ее разрыва, так как точка M не стремится к точке M_0 при $x \to x_0$ (рис. 27). Отсюда, в частности, следует, что если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ существует, то функция непрерывна в точке x_0. Однако обратное утверждение неверно. На рисунке 28 изображен график функции, непрерывной в точке x_0, но не имеющий касательной в точке M_0 — предельное положение секущей при стремлении точки M к M_0 слева и справа оказывается различным.

Все же в подавляющем большинстве точек графики элементарных функций имеют касательные и благополучно *спрямляются* вблизи них.

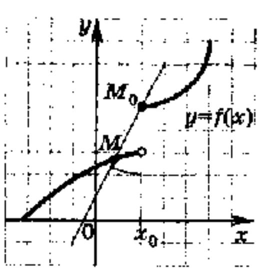


Рис. 27

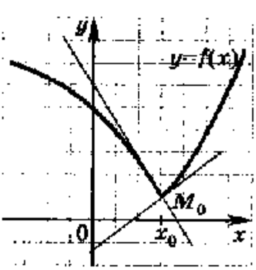


Рис. 28

Работать с прямыми значительно легче, ведь они являются графиками самых простых — линейных — функций. Возможность заменять на маленьких промежутках произвольные функции линейными независимо друг от друга открыли в середине XVII в. И. Ньютон и Г. В. Лейбниц. Эта возможность легла в основу нового раздела математики — «Математического анализа»[1].

Рассмотрим, как получить ***уравнение касательной*** к графику функции.

На рисунке 29 изображен график некоторой функции $y = f(x)$, имеющий в точке $M_0(x_0; y_0)$ касательную M_0K. В соответствии с определением, при стремлении точки M к точке M_0 секущая MM_0, поворачиваясь вокруг точки M_0, стремится слиться с касательной M_0K.

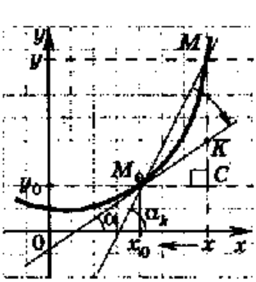


Рис. 29

Стремление точки M к M_0 обеспечивается стремлением ее абсциссы x к x_0, абсциссе точки M_0.

Чтобы получить уравнение прямой M_0K: $y = k(x - x_0) + y_0$, нужно найти ее *угловой коэффициент* k, равный тангенсу угла α наклона этой прямой[2]. К этому углу стремится α_k — угол наклона секущей MM_0: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_k = \alpha$.

Тангенс угла наклона секущей можно выразить из прямоугольного треугольника M_0CM, в котором

$$M_0C = x - x_0 \text{ и } MC = y - y_0; \ \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Таким образом, $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha_k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

П р и м е р 1. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

---

[1] Статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый для этого род исчисления», опубликованная в математическом журнале в 1684 г., состояла всего лишь из шести страниц и была первой работой по изложению метода исчисления бесконечно малых. Основным понятием у Лейбница, как и в нашем учебнике, являлось понятие касательной.

[2] Это не относится к касательным, которые перпендикулярны оси абсцисс. Они не являются графиками линейных функций $y = kx + l$, а задаются уравнениями вида $x = a$.

Р е ш е н и е.

① Найдем ординату точки касания: $y_0 = 1^2 = 1$.

② Найдем разность $y - y_0$: $y - y_0 = x^2 - 1$.

③ Найдем угловой коэффициент касательной:

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

④ Напишем уравнение касательной: $y = 2(x - 1) + 1$.

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим о т в е т: $y = 2x - 1$.

З а м е ч а н и е. Эту задачу можно решить и более привычным способом, заметив, что касательная к параболе имеет с ней *единственную* общую точку (рис. 30). Тогда коэффициент k вычисляется как значение k, при котором квадратное уравнение $x^2 = k(x - 1) + 1$ имеет единственный корень, т. е. при котором его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$x^2 = k(x - 1) + 1,\ x^2 - kx - (k - 1) = 0.$$

$$D = 0: k^2 - 4(k - 1) = 0,\ k^2 - 4k + 4 = 0,\ (k - 2)^2 = 0,\ k = 2.$$

П р и м е р 2. Найти уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Р е ш е н и е. Поскольку x_0 является левой границей области определения, точка M может приближаться к точке M_0 только справа (рис. 31), а значит, искать нужно правый предел:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

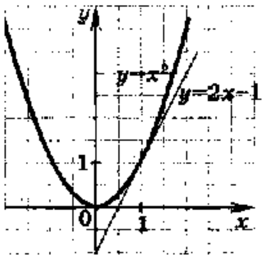


Рис. 30

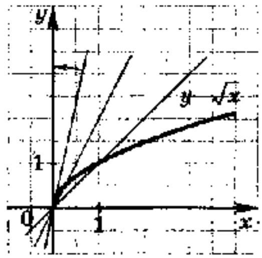


Рис. 31

Предел не существует, однако ясно, что угол наклона секущей MM_0 стремится к 90°. При этом касательная или параллельна оси ординат, или, как в нашем случае, совпадает с ней.

Ответ: уравнение касательной $x = 0$.

Упражнения

51. Найдите приближенно тангенс угла наклона касательной к графику функции в отмеченных точках (рис. 32).

52. В каких точках касательные к графику функции (рис. 33) параллельны: а) оси абсцисс; б) прямой $y = x$; в) прямой $y = -x$?

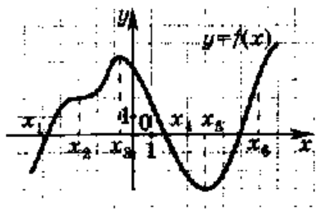


Рис. 32

53. В каких точках не существует касательной к графику функции (рис. 34)?

54. Постройте график функции $y = x^2$.

1) Отметьте на графике точки M_0, M_1, M_2, M_3 с абсциссами $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

2) Найдите угловые коэффициенты секущих:

а) M_0M_3; б) M_0M_2; в) M_0M_1.

3) Найдите угловой коэффициент касательной в точке M_0 как предел.

55. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$.

56. 1) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой: а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 2$.

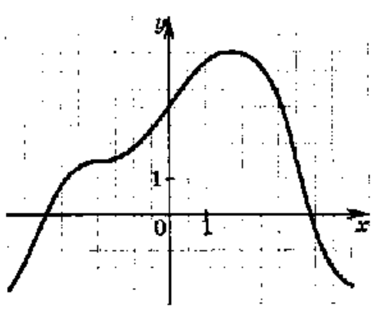


Рис. 33

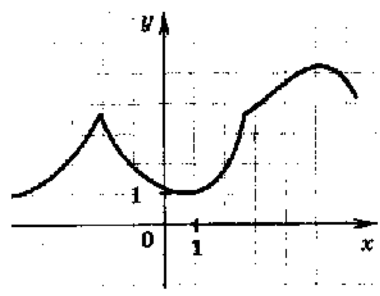


Рис. 34

2)° Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3$ в точке с ординатой: а) $y_0 = 0$; б) $y_0 = 1$; в) $y_0 = -3$.

57. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - x + 3$, проходящей через его точку:

а) $A(-1; 6)$; б) $D(0; 3)$.

58°. Найдите координаты точки графика функции y, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен k:

а) $y = x^2 - 11x + 1$, $k = 1$; б) $y = x^2 + 5x - 6$, $k = -1$.

59•. Найдите угол между касательными, проведенными к графикам функций $y = 2x^2 - 3$ и $y = 2x^2 - x + 3$ в точке их пересечения.

60•. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - x + 3$:

а) проходящей параллельно оси абсцисс;
б) проходящей параллельно прямой $y = x + 2$;
в) проходящей параллельно прямой $y = -2x + 5$.

61•. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x + 1$, перпендикулярной прямой:

а) $2y + x - 3 = 0$; б) $6y - x + 11 = 0$.

62*. Найдите геометрическое место таких точек M, из которых можно провести к параболе $y = x^2$ две взаимно перпендикулярные касательные.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что функция непрерывна в точке, где к ее графику проведена касательная.

2. Верно ли, что в любой точке, где функция непрерывна, к ее графику можно провести касательную?

3. Постройте график функции $y = \sin x$. Сколько существует касательных к этому графику, параллельных оси абсцисс? Укажите абсциссы точек, в которых касательные к этому графику имеют положительные угловые коэффициенты.

5. Производная и дифференциал функции

Выражение $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ позволяет находить угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в произвольной точке x_0. Обычно используется специальное обозначение: $x - x_0 = \Delta x$ (читается: *дельта икс*). В русском языке для величины, на которую изменилось начальное количество, используется слово «прирост». Поскольку Δx показывает, на сколько изменилось начальное значение аргумента x_0: $x = x_0 + \Delta x$, Δx называют *приращением аргумента*.

Приращению аргумента соответствует *приращение функции*, которое также обозначается с помощью заглавной греческой буквы Δ[1]:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f.$$

С новыми обозначениями получаем:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

На рисунке 35 касательная делит отрезок CM на две части. Одну из них, CK, которая показывает, как изменилась ордината точки касательной, т. е. приращение соответствующей линейной функции называют *дифференциалом*.

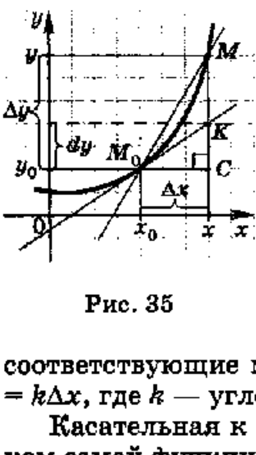


Рис. 35

Говорят, что *дифференциал функции* $y = f(x)$ — это линейная часть ее приращения и обозначают его dy или df.

Вблизи точки касания график функции сливается с касательной, а значит, приращение функции практически не отличается от ее дифференциала, т. е. относительная погрешность замены Δy на dy близка к нулю. Это позволяет достаточно точно вычислять приращения функции, соответствующие малым приращениям аргумента: $\Delta y \approx dy = k\Delta x$, где k — угловой коэффициент касательной M_0K.

Касательная к графику функции $y = x$ совпадает с графиком самой функции, значит, для нее

$$\Delta x = dx.$$

Поскольку дифференциалы функции и аргумента представляют катеты прямоугольного треугольника M_0CK (см. рис. 35), можно через них выразить угловой коэффициент касательной: $k = \dfrac{dy}{dx}$.

[1] Букву «Δ» для обозначения приращений переменных в середине XVIII в. стал использовать Л. Эйлер.

С другой стороны, с учетом того, что при x, стремящемся к x_0, их разность Δx стремится к нулю, k можно найти как предел:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

С этого предела и началась в XVII в. новая эпоха в развитии математики.

Предел частного приращений функции и аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется производной функции.

Производная функции y обозначается y' (читается: «*игрек штрих*»). Так, значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 записывается, как $f'(x_0)$[1]:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

▼ Если x_0 является левой или правой границей области определения функции, говорят соответственно о правой или левой производной. Так, в левой границе Δx стремится к нулю справа, а значит, производная равна правому пределу: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Аналогично, левая производная: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Специального обозначения для односторонних производных нет, просто следует помнить, что на границе области определения функция может иметь только одностороннюю производную (но может и не иметь, как рассмотренная в примере 2 предыдущего пункта функция $y = \sqrt{x}$). △

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ в ее произвольной точке x (теперь можно отказаться от использования обозначе-

---

[1] Приращение абсциссы, «бесконечно малую» разность $x_2 - x_1$, Лейбниц обозначил через dx (d — первая буква в латинском слове *diferentia* — разность), соответствующее приращение функции $y_2 - y_1$ — через dy. Для производной он специального обозначения не ввел и записывал ее как частное дифференциалов. Обозначения y' и $f'(x)$ для производной ввел Лагранж. Сам термин «производная» (перевод французского слова *derivée*) впервые встретился у француза Луи Арбогаста в его книге «Вычисление производных», опубликованной в Париже в 1800 г.

ния x_0) $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ сама является функцией аргумента x.

Поскольку $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$, отношение дифференциалов также иногда используют для обозначения производной. Сам процесс нахождения производной называют *дифференцированием*, а функцию, которая имеет производную в любой точке области определения, называют *дифференцируемой*.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3 - 3x + 3$.

Решение.

1 $\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) + 3) - (x^3 - 3x + 3) =$
$= ((x + \Delta x)^3 - x^3) - 3\Delta x =$
$= (x + \Delta x - x)((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) - 3\Delta x =$
$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\Delta x = \Delta x(3x^2 + \Delta x(3x + \Delta x) - 3)$;

2 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(3x^2 + \Delta x(3x + \Delta x) - 3)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + \Delta x(3x + \Delta x) - 3) = 3x^2 - 3$.

Ответ: $y' = 3x^2 - 3$.

Используя обозначение производной, можно записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Пример 2. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение. Абсцисса указанной точки графика: $x_0 = 0$. В уравнение касательной входят еще $f(x_0)$ — ордината точки касания и $f'(x_0)$ — значение, которое принимает производная в точке x_0: $f(x_0) = f(0) = 3$; $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x_0) = f'(0) = -3$.

Теперь можно записать уравнение искомой касательной: $y = -3x + 3$.

Ответ: $y = -3x + 3$.

Пример 3. Найти приближенное значение функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ при $x = 1{,}99$.

Решение. Из того, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ и $\Delta f \approx df = f'(x) \cdot \Delta x$, получаем:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Представим 1,99 как $2 - 0{,}01$ и подставим в полученную формулу $x_0 = 2$ и $\Delta x = -0{,}01$:

$f(1{,}99) = f(2 - 0{,}01) \approx f(2) + f'(2) \cdot (-0{,}01).$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 3 = 5;\ f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9.$

$f(1{,}99) \approx 5 + 9 \cdot (-0{,}01) = 5 - 0{,}09 = 4{,}91.$

Ответ: 4,91.

Примечание. Чем меньше Δx, тем точнее приближение. В этом примере точное значение $f(1{,}99)$ равно 4,910599.

К понятию производной мы пришли, решая задачу составления уравнения касательной к графику функции. Однако есть и другой путь к производной.

Рассмотрим движение материальной точки M по прямой с выбранным на ней началом отсчета — точкой O. Расстояние от начала отсчета до точки M в каждый момент времени t обозначим буквой s. Тогда движение точки M будет описываться функцией $s = s(t)$ (рис. 36).

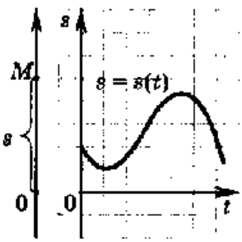


Рис. 36

Найдем $v(t)$ — скорость точки M в момент времени t. Мгновенная скорость, как вы знаете из курса физики, приближенно равна средней скорости точки за очень маленький временной интервал, т. е. $v(t) \approx \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Погрешность этого приближения стремится к нулю при неограниченном уменьшении продолжительности рассматриваемого временного интервала, значит, $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Мы снова пришли к производной $s'(t)$. Скорость изменения расстояния оказалась равна его производной.

Перенося физический смысл производной расстояния на произвольные функции, часто говорят, что *производная есть скорость изменения функции*[1].

---

[1] Знаменитый английский ученый И. Ньютон (1643—1727) пришел к понятию производной от задач механики, поэтому для него основным понятием была скорость, а не касательная, как у Лейбница. Свои результаты в этой области он изложил в трактате «Метод флюксий и бесконечных рядов», который был опубликован уже после его смерти, в 1736 г. Однако открыл свой метод флюксий, тех же самых производных, Ньютон еще в середине 60-х годов XVII в., когда 20-летний Лейбниц был студентом юридического факультета и математикой еще не занимался. Два ученых из разных стран независимо друг от друга пришли к понятию производной, Ньютон, решая задачи физики, Лейбниц — задачи геометрии.

П р и м е р 4. Через сколько секунд после начала движения по прямой материальная точка остановится, если расстояние от нее до некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s = t^2 - 8t + 10$ (м), где t — время движения в секундах?

Р е ш е н и е. В момент остановки скорость точки становится равной нулю. Значит, нужно найти скорость как производную функции $s(t)$ и приравнять ее нулю.

① $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) =$

$= (t + \Delta t)^2 - 8(t + \Delta t) + 10 - (t^2 - 8t + 10) = \Delta t(2t - 8 + \Delta t);$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2t - 8 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t - 8 + \Delta t) =$$

$= 2t - 8.$

② $v(t) = 0$: $2t - 8 = 0$, $t = 4$.

О т в е т: точка остановится через 4 с после начала движения.

Упражнения

63. В каких точках производная функции, график которой изображен: 1) на рисунке 37; 2) на рисунке 38; 3) на рисунке 39; 4) на рисунке 40:

а) не существует, б) принимает значение, равное нулю?

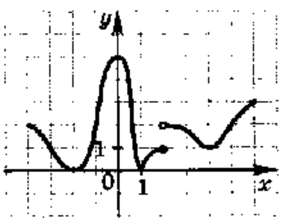


Рис. 37

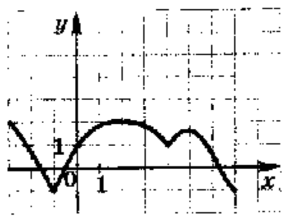


Рис. 38

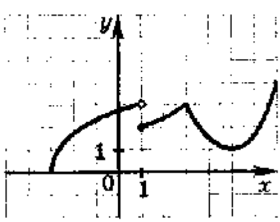


Рис. 39

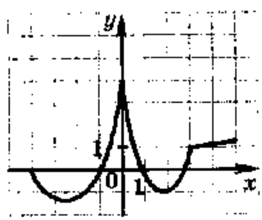


Рис. 40

На каких промежутках ее значения положительны, а на каких отрицательны?

64. Функция $y = g(x)$ задана своим графиком (рис. 41).

Сравните значения производной:

а) $g'(1,5)$ и $g'(-2)$;

б) $g'(-2)$ и $g'(-1)$;

в) $g'(-1)$ и $g'(2)$;

г) $g'(-1)$ и $g'(0)$.

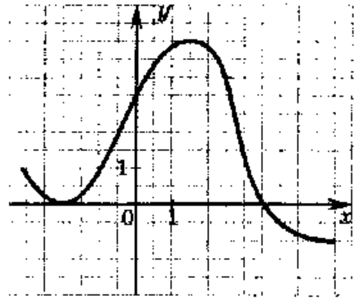


Рис. 41

65. По графикам функций (рис. 42, *а—г*) определите:

1) на каких промежутках производная функции:

а) положительна; б) отрицательна;

2) производная какой из этих функций обращается в нуль и в какой точке.

66. Используя графические соображения, найдите:

а) производную постоянной ($y = C$); б) производную линейной функции ($y = kx + b$).

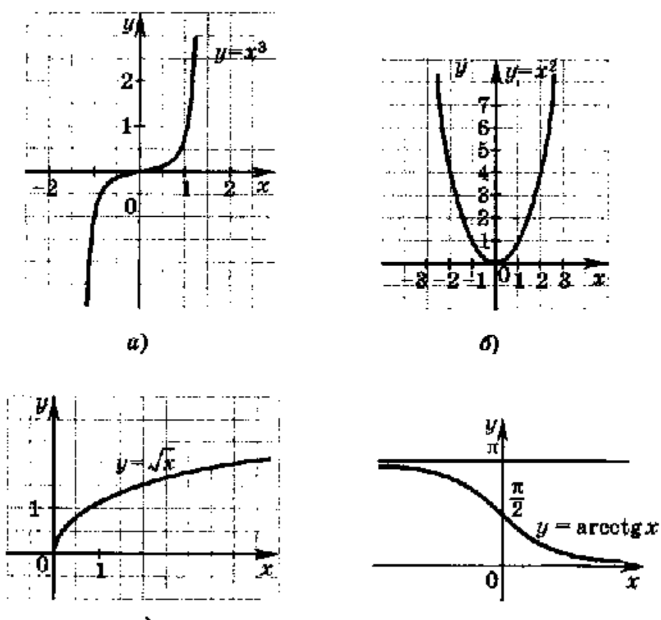


Рис. 42

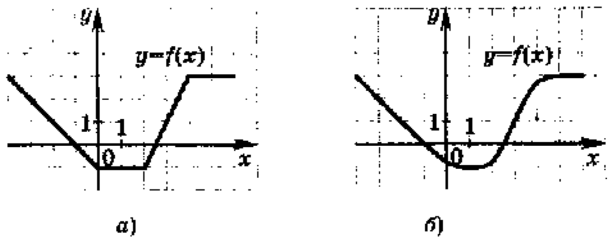


Рис. 43

67$^\bullet$**.** Верно ли утверждение: «Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, график которой имеет горизонтальную асимптоту в левой и правой полуплоскостях, то существует $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$»?

68$^\bullet$**.** Скопируйте в свою тетрадь график функции, изображенный: 1) на рисунке 43, *а*; 2) на рисунке 43, *б*. В той же системе координат изобразите схематически график производной этой функции.

69$^\bullet$**.** Докажите, что:

а) производная четной дифференцируемой функции является нечетной функцией;

б) нечетная дифференцируемая функция имеет четную производную.

70. Найдите Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции:

1) $y = x^2$, если: а) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $x = 2{,}5$, $\Delta x = 1{,}5$;

2) $y = \dfrac{1}{x}$, если: а) $x = 3$, $\Delta x = 0{,}01$; б) $x = 2$, $\Delta x = -0{,}1$.

71°**.** Пользуясь определением, найдите производные следующих функций:

а) $y = x^2$;	в) $y = \dfrac{1}{x}$;	д)$^\bullet$ $y = \dfrac{x}{x-1}$;
б) $y = x^3$;	г)$^\bullet$ $y = \sqrt{x}$;	е)$^\bullet$ $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

72°**.** Докажите, что функция $f(x)$ является производной функции $g(x)$:

а) $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$;

б)$^\bullet$ $f(x) = 6x^2 - 6x$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

При решении упражнения 73—84 используйте результаты упражнений 71 и 72.

73. При каких значениях x выполняется условие:

а) $f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$, если $f(x) = x^2 - 4x + 6$;

б) $f'(x) > 5$, если $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$?

74. Найдите значение производной функции $f(x)$ и запишите уравнение касательной к графику этой функции в его точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 6$: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 2$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 2$.

75. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, которая проходит через точку A, если:

а) $y = x^2 - 4x + 6$, $A(2; 2)$; в) $y = \frac{1}{x}$, $A(-1; -1)$;

б) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$, $A(1; 1)$; г) $y = \sqrt{x}$, $A(4; 2)$.

76. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $y = x^2 - 4x + 6$: а) параллельной оси абсцисс; б) в точке его пересечения с осью ординат;

2) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$: а) параллельной прямой $y = 12x + 1$; б) в точке пересечения с осью ординат.

77. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 6$, перпендикулярной прямой:

а) $x = 5$; б) $y = x$; в) $y = -x$; г)$^\circ$ $y = 2x + 3$.

78. Найдите приближенное значение функции:

а) $f(x) = x^2$ при $x = 2{,}01$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x = 1{,}97$;

б) $f(x) = x^3$ при $x = 2{,}83$; г) $f(x) = \sqrt{x}$ при $x = 4{,}03$.

79. Тело движется по закону $s(t) = t^2 - 4t + 6$. Найдите:

1) среднюю скорость движения тела $\left(v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ в промежутке времени:

а) $[0; 1]$; б) $[2; 5]$; в) $[t_1; t_2]$;

2) мгновенную скорость движения тела ($v(t) = s'(t)$) при:

а) $t = 1$; б) $t = 5$; в) $t = t_0$;

3)$^\bullet$ ускорение тела $\left(a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)\right)$.

80. Тело движется по прямой так, что расстояние s до него от некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s = t^2 - 4t + 6$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите:

1) скорость тела через 3 с после начала движения;

2) в какой момент скорость тела равна 16 м/с;

3) в какой момент расстояние от тела до точки отсчета будет наименьшим;

4) в какой момент тело остановится ($v = 0$).

81. Количество электричества (в кулонах), протекающее через некоторый проводник, задается формулой $q = t^2 - 4t + 6$, где t — время, с. Найдите силу тока ($I = q'(t)$) в момент времени $t = 2$ с.

82$^{\bullet}$. Тело движется по прямой так, что расстояние s от начала отсчета изменяется по закону $s = t^3 - 3t + 3$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите:

1) через сколько секунд после начала движения тело остановится;

2) в какой момент скорость тела станет равной 9 м/с;

3) каково наименьшее расстояние от тела до точки отсчета;

4) в какой момент ускорение тела станет равным 18 м/с^2.

83$^{\bullet}$. Закон изменения температуры T (в °C) тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?

84$^{\bullet}$. Сила тока I (А) изменяется в зависимости от времени t (с) по закону $I = 0{,}4t^2$. Найдите скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

85$^{\bullet}$. Вычислите приближенно площадь S круглой пластинки, радиус 3 см которой после ее охлаждения уменьшился на 0,02 см.

86$^{\bullet}$. Тело, масса которого $m = 0{,}5$ кг, движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 2t + 3$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите кинетическую энергию тела через 7 с после начала движения.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему равенство приращения аргумента функции $y = x$ и ее дифференциала является точным.

2. Почему производную функции называют скоростью ее изменения?

3. Изобразите график какой-нибудь непрерывной функции, которая не имеет производной в точке $x = 1$.

4. Найдите по определению производную функции

$$f(x) = 3x^2 - 2x.$$

6. Точки возрастания, убывания и экстремума функции

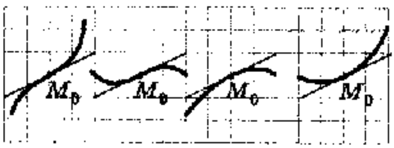
Угловой коэффициент $k = f'(x_0)$ касательной к графику функции $y = f(x)$ позволяет сделать вывод о том, как ведет себя функция вблизи точки касания $M_0(x_0; y_0)$.

На рисунке 44 (*а—г*) схематически изображены случаи, соответствующие положительному значению $f'(x_0)$. На рисунке 45 (*а—г*) значение $f'(x_0)$ отрицательно.

Поскольку график функции в ближайшей окрестности точки касания сливается с касательной, можно заметить, что для точек этой окрестности:

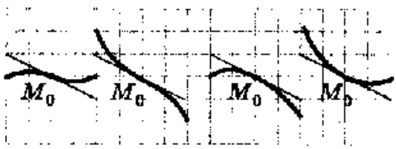
1) при $f'(x_0) > 0$ (рис. 44) точки графика слева от точки касания расположены ниже, а справа — выше этой точки;

2) при $f'(x_0) < 0$ (рис. 45) точки графика слева от точки касания расположены выше, а справа — ниже этой точки.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 44



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 45

Если слева от точки x_0 значения функции меньше, а справа — больше, чем значение функции в самой точке x_0, то x_0 называют ***точкой возрастания***. Если слева от точки x_0 значения функции больше, а справа — меньше, чем значение функции в самой точке x_0, то x_0 называют ***точкой убывания***.

Когда x_0 — точка возрастания, в некоторой ее окрестности разности $x - x_0$ и $f(x) - f(x_0)$ одинаковы по знаку.

▼ Используя кванторы, это можно записать так: $\exists\delta > 0$ такое, что $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Для точки убывания x_0 соответственно: $\exists\delta > 0$ такое, что $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0.\ \triangle$$

З а м е ч а н и е. Когда речь идет об элементарных функциях, то точка возрастания принадлежит некоторому промежутку возрастания функции, а вот у произвольной функции такого промежутка может и не оказаться. Так, например, $x = 0$ — точка возрастания функ-

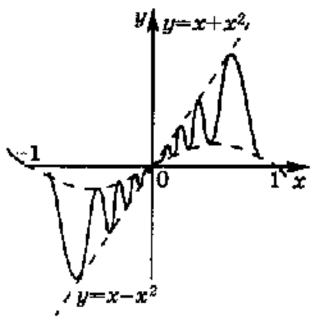


Рис. 46

ции $y = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{5}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \end{cases}$ которая при стремлении ее аргумента к нулю *бесконечно колеблется* между функциями $y = x - x^2$ и $y = x + x^2$ (рис. 46). Однако как угодно близко к нулю есть промежутки, на которых функция убывает.

Вы неоднократно встречались с промежутками возрастания или убывания функций, которые еще называют промежутками монотонности. Понятно, что любая внутренняя точка промежутка возрастания [убывания] является точкой возрастания [убывания] функции.

Отысканию промежутков монотонности помогает условие возрастания [убывания] функции: *если во всех точках некоторого промежутка производная функции положительна [отрицательна], то на этом промежутке функция возрастает [убывает].*

Это утверждение является достаточным[1] условием возрастания [убывания] функции.

Доказать его можно с помощью *теоремы Лагранжа*[2]:

если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную в каждой его внутренней точке, то на интервале $(a; b)$ существует точка x_0 такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

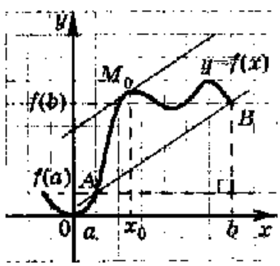


Рис. 47

Графически теорема Лагранжа очевидна (рис. 47).

Касательная к графику функции в точке M_0, наиболее удаленной от секущей AB, параллельна этой секущей, а $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — это угловой коэффициент секущей.

---

[1] Условие не является необходимым, так как функция может возрастать на промежутке, и, например, не иметь производной в некоторых его точках.

[2] Жозеф Лагранж (1736—1813) — знаменитый французский математик, внесший большой вклад в развитие математического анализа. Родился в семье обедневшего чиновника. Математику изучал самостоятельно, и уже в 19 лет стал профессором математики в Артиллерийской школе Турина. Позднее он стал преемником Эйлера в Берлинской академии. Как уже отмечалось раньше, именно он предложил использовать штрих для обозначения производной.

Если, как сказано в условии возрастания функции, ее производная положительна во всех точках некоторого промежутка, то для любых двух неравных значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$. Значит, большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. функция возрастает. Аналогично доказывается убывание функции на промежутке, где производная отрицательна.

Рассмотрим теперь, как выглядит график функции вблизи точки, в которой касательная к нему параллельна оси абсцисс.

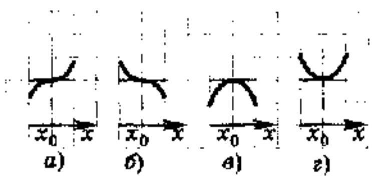


Рис. 48

На рисунке 48, *а* значения функции слева от x_0 меньше, а справа — больше, чем $f(x_0)$. Значит, x_0 — точка возрастания.

На рисунке 48, *б* x_0 — точка убывания.

На рисунке 48, *в* и слева и справа от x_0 значения функции не больше, чем $f(x_0)$, а на рисунке 48, *г* — не меньше, чем $f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой ***максимума*** *[****минимума****] функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для всех x из которой $f(x) \leqslant f(x_0)$ [$f(x) \geqslant f(x_0)$].*

▼ Условие максимума [минимума] функции $f(x)$ можно записать с помощью кванторов:

$$\exists\delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)\ [f(x) \geqslant f(x_0)].\ \triangle$$

Значение функции в точке минимума называют *минимумом*, а значение в точке максимума — *максимумом* функции и обозначают f_{min} и f_{max} соответственно.

Максимум и минимум функции объединяются термином *экстремум. Функция имеет экстремум в точке, если в этой точке у нее максимум или минимум.*

Точка экстремума не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, значит, в ней производная функции не может принимать ни положительного, ни отрицательного значения, т. е. в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует, называется ***критической****.*

▼ Когда производная равна нулю, график функции вблизи точки касания сливается с графиком постоянной функции

$y = f(x_0)$, поэтому критические точки, в которых производная обращается в нуль, иногда называют ***стационарными*** (от латинского *stationaris* — неподвижный). △

Понятно, что если слева от точки экстремума функция возрастает, а справа убывает, то в этой точке функция имеет максимум (см. рис. 48, *в*), если же при переходе через эту точку убывание сменяется на возрастание (см. рис. 48, *г*), то экстремум является минимумом.

Основываясь на достаточном условии возрастания [убывания], получим достаточные условия максимума и минимума функции:

если при переходе через критическую точку производная непрерывной функции изменяет знак с плюса на минус [с минуса на плюс], то это точка максимума [минимума].

▼ Достаточно, конечно, говорить о непрерывности функции в самой критической точке. А вот разрыв функции в критической точке не позволяет гарантировать наличие в ней экстремума (рис. 49). △

Пример 1. Найти точки экстремума и промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

Решение. Производная $f'(x) = 3x^2 - 3$ данной функции была найдена в примере 1 предыдущего пункта.

Найдем точки, в которых $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

$f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$ или $x_2 = 1$ (рис. 50).

На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ производная функции положительна, а на интервале $(-1; 1)$ отрицательна.

При переходе через критическую точку $x = -1$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, в силу непрерывности функции, $x = -1$ — точка максимума.

При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x = 1$ — точка минимума.

На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, так как на них ее производная положительна, $f(-1)$ — наибольшее значение функции на промежутке $(-\infty; -1]$, во внутренних

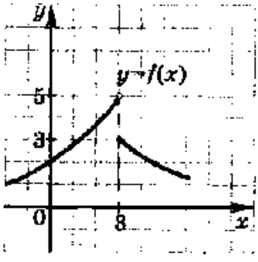


Рис. 49

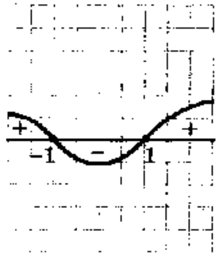


Рис. 50

точках которого функция возрастает, значит, она возрастает на всем этом промежутке.

Поскольку $f(1)$ — наименьшее значение функции на промежутке $[1; +\infty)$, то функция и на этом промежутке возрастает.

Аналогичным образом, присоединяя точки -1 и 1 к интервалу убывания $(-1; 1)$, получаем промежуток убывания функции $[-1; 1]$.

Ответ: точки экстремума функции: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 1$. Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, а убывает на отрезке $[-1; 1]$.

Информация о промежутках монотонности и точках экстремума помогает при изображении графика функции.

Пример 2. Построить схематический график функции $y = x^3 - 3x + 3$.

Решение. В предыдущем примере были найдены промежутки монотонности и точки экстремума данной функции. Однако для построения даже схематического графика нужно знать не только абсциссы, но и ординаты некоторых его точек.

Необходимо найти значения функции в точках экстремума, т. е. сами экстремумы функции.

Максимум: $y_{max} = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$;

минимум: $y_{min} = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$.

Полезно найти координаты еще некоторых точек графика. Проще всего найти точку пересечения графика с осью ординат: $(0; 3)$. Найдем, кроме того, значения функции в точках -2 и 2. $y(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = 1$, $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 3 = 5$.

При заполнении таблиц будем использовать следующие условные обозначения для характера изменения функции.

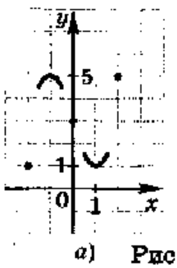
x	$(-\infty; -1]$	-1	$[-1; 1]$	1	$[1; +\infty)$	0	-2	2
Характер изменения и значения $f(x)$	↗	$\frown$ 5	↘	1 $\smile$	↗	3	1	5

↗ — функция возрастает, ↘ — функция убывает, $\frown$ — функция имеет максимум, $\smile$ — функция имеет минимум в данной точке.

Для построения графика следует еще выяснить, как ведет себя функция при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

асимптот нет.



а)

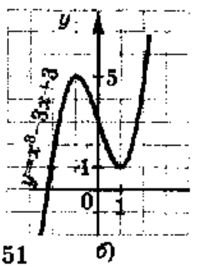


Рис. 51 б)

Отметив на координатной плоскости найденные точки графика, проводим через них кривую, учитывая характер изменения функции на различных промежутках (рис. 51).

П р и м е р 3. Изобразить график какой-нибудь функции $y = f(x)$, зная, что:

а) функция определена на интервале $(-4; 3)$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4)$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из интервала $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из интервалов $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;

г) нули функции $x = -1$ и $x = 2$.

Р е ш е н и е. Заметим, что функция непрерывна, так как имеет производную в каждой точке своей области определения. На интервале $(-4; 0)$ функция убывает, а на интервалах $(0; 2)$ и $(2; 3)$ — возрастает.

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, функция имеет в этой точке минимум. При переходе через точку $x = 2$ производная свой знак не изменяет — график функции в окрестности этой точки выглядит так, как на рисунке 48, *а*.

Поскольку непрерывная функция $y = f(x)$ имеет единственный экстремум — минимум, он совпадает с $\min f(x)$ — наименьшим значением функции.

Как следует из данной в условии области значений, $\min f(x) = y_{\min} = f(0) = -3$.

Занесем данную в условии информацию в таблицу.

x	$(-4; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; 3)$	-1
Характер изменения и значения $f(x)$	↘	-3	↗	0	↗	0

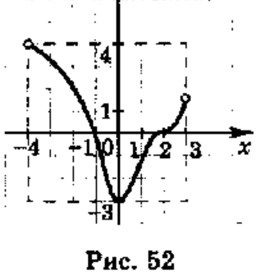


Рис. 52

При построении графика нужно учесть, во-первых, что в точке $x = 2$ касательная к графику совпадает с осью абсцисс, во-вторых, поскольку значения функции могут быть как угодно близкими к числу 4, то либо $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$, либо $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, либо оба эти предела должны быть равны 4. Один из возможных графиков изображен на рисунке 52.

Упражнения

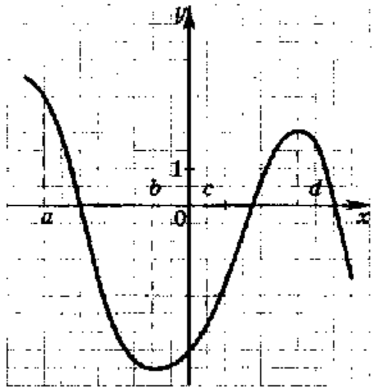


Рис. 53

87. Какой знак имеет производная функции $y = f(x)$ (рис. 53) в точках с абсциссами a, b, c, d?

88. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 54—56).

Определите по графику:

1) является ли точкой возрастания или точкой убывания:

а) $x = -1$; в) $x = 1$;

б) $x = 0$; г) $x = 1{,}5$;

2) промежутки, на которых производная положительна;

3) промежутки, на которых производная отрицательна;

4) точки, в которых производная равна нулю;

5) точки, в которых производная не существует.

89. На рисунке 57 к указанным точкам графика проведены касательные. Предложите какой-нибудь возможный вариант графика.

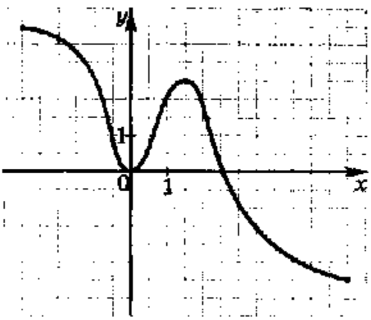


Рис. 54

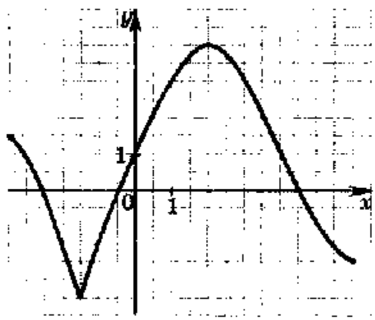


Рис. 55

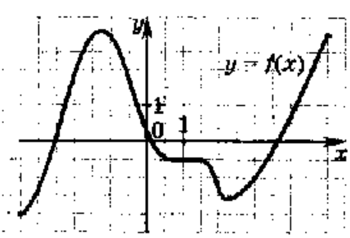


Рис. 56

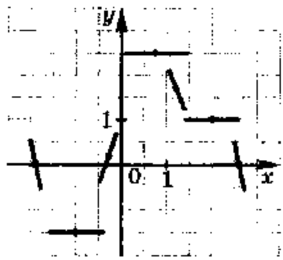


Рис. 57

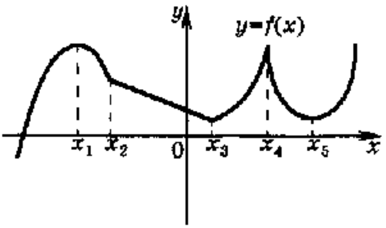


Рис. 58

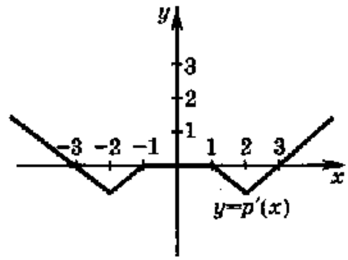


Рис. 59

90. На рисунке 58 изображен график функции $y = f(x)$.

В каких точках эта функция имеет максимумы, в каких — минимумы?

91●. На рисунке 59 изображен график функции $y = p'(x)$.

1) На каком промежутке функция $y = p(x)$:

а) возрастает; б) убывает; в) постоянна?

2) Изобразите схематически график функции $y = p(x)$, зная, что он проходит через начало координат.

92. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 60, *а—в*).

Укажите:

а) область определения функции;

б) множество значений функции;

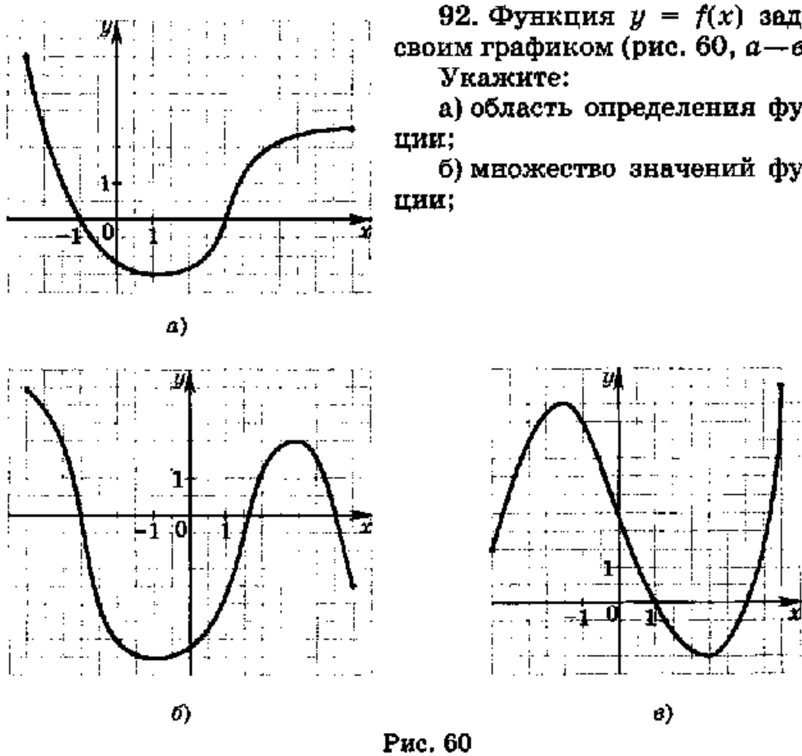


Рис. 60

в) нули функции;

г) точки графика, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс;

д) точки максимума и минимума;

е) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

ж) значения аргумента при которых $f(x) < 1$;

з) точки пересечения с осями координат.

93. Используя таблицы, постройте график функции.

а)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; +\infty)$	0	3
$f(x)$	↗	0	↘	-2	↗	$-1{,}5$	0

б)

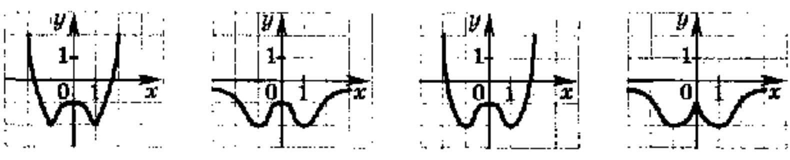
x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f(x)$	↘	2	↘	не сущ.	↗	2	↘

94$^\bullet$. Четыре ученика выполнили построение графика функции (рис. 61) по следующей таблице:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

1) Могли ли у них получиться разные графики?

2) Какие графики построены правильно? Объясните, какие ошибки допустили ученики при построении других графиков.



а) б) в) г)

Рис. 61

95. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

1) а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;

в) производная функции положительна на $(2; 5]$, отрицательна на $[-2; -1)$ и на $(-1; 2)$;

г) $f'(x) = 0$ в точках с абсциссами -1 и 2;

д) нули функции: 0 и 3;

2) а) область определения функции есть промежуток $[-4; 4{,}5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 5{,}5]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $[-4; 1)$ и $(3; 4{,}5]$ и $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(1; 3)$;

г) значения функции отрицательны только на промежутке $[-4; -3)$;

д) $y_{\min} = f(3) = 1$, $y_{\max} = f(1) = 5{,}5$;

3)• а) область определения функции — промежуток $[-5; 4)$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 4]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(1; 2)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(-5; -1)$ и $(2; 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции: -3 и 2.

В упражнениях 96—98 используйте результаты упражнений 71, 72 предыдущего пункта.

96. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = x^2$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y = x^3$; г) $y = \sqrt{x}$; е) $y = \dfrac{x}{x-1}$.

97. Найдите критические точки и промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 6$; б) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

98•. Постройте схематически график функции

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 2.$$

99•. Приведите пример функции $y = f(x)$, которая обладает следующим свойством:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f),\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

100•. Верно ли утверждение:

а) четная функция может иметь единственную точку максимума;

б) нечетная функция может иметь единственную точку экстремума;

в) периодическая функция может иметь единственную точку экстремума;

г) монотонная функция может иметь точку экстремума?

101•. 1) Может ли иметь нечетное число экстремумов:

а) нечетная функция; б) четная функция?

2) Может ли четная функция иметь четное натуральное число экстремумов? Если может, то при каком условии?

Контрольные вопросы и задания

1. Является ли точка возрастания внутренней точкой области определения?

2. В каком случае функция, возрастающая на каждом из двух непересекающихся промежутков, возрастает и на их объединении?

3. Запишите для функции $y = \cos x$ общий вид: а) точек максимума; б) точек минимума; в) промежутков возрастания.

ГЛАВА

3

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Как вы видели в предыдущей главе, производная является мощным средством для исследования функций. Однако процесс ее нахождения, связанный с вычислением предела, даже в простых случаях довольно трудоемок. В этой главе вы познакомитесь с возможностями существенного упрощения нахождения производных.

7. Производная суммы, произведения и частного

Многие функции можно представить как сумму, произведение или частное более простых функций. Пусть этими более простыми функциями будут дифференцируемые функции u и v с аргументом x.

1. Производная суммы функций

Поскольку приращение суммы функций складывается из приращений каждого слагаемого, то, заменяя предел суммы суммой пределов, получим:

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Производная суммы [разности] равна сумме [разности] производных.

2. Производная произведения функций

Заменяя предел суммы суммой пределов, а пределы произведений произведениями пределов, получим:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v.$$

Заметим, что u — это функция аргумента x, а не Δx, поэтому, когда Δx стремится к нулю, значение u не меняется, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u = u$. Аналогично, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v = v$.

Функция v непрерывна, поскольку имеет производную, а приращение непрерывной функции стремится к нулю, когда к нулю стремится приращение ее аргумента: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Таким образом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v =$$

$$= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Производная произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй.

Часто один из множителей является числовым. Поскольку производная постоянной равна нулю, имеем:

$$(kv)' = kv'.$$

Числовой множитель можно вынести за знак производной.

Пример 1. Найти значение производной многочлена $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ при $x = -1$.

Решение. Используя формулу производной суммы и вынося за знаки производных числовые множители, получим:

$$P'(x) = (2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2)' =$$

$$= 2(x^4)' - 3(x^3)' + 5(x^2)' - 7x' + (2)'.$$

Как уже говорилось выше, производная числа (постоянной) равна нулю.

Касательные к графику функции $y = x$ в любых его точках с ним совпадают, значит, их угловые коэффициенты равны 1. Нетрудно найти производную этой функции и по определению: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$. Значит, $x' = 1$.

Менее приятно находить по определению производную функции $y = x^2$. Однако у нас есть формула производной произведения:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x.$$

Аналогично находим производные функций $y = x^3$ и $y = x^4$.

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2;$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

Теперь можно завершить нахождение производной данного многочлена:

$$2(x^4)' - 3(x^3)' + 5(x^2)' - 7x' + (2)' = 8x^3 - 9x^2 + 10x - 7.$$

При $x = -1$ имеем: $P'(-1) = -8 - 9 - 10 - 7 = -34$.

Ответ: $P'(-1) = -34$.

Находить производные более высоких степеней x нам в этой задаче было не нужно, однако можно показать, что $(x^5)' = 5x^4$, $(x^6)' = 6x^5$, и, вообще, при любом натуральном n:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ верна не только для натуральных, но и для произвольных значений n. Мы докажем это в пункте 9, но использовать формулу начнем уже сейчас.

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Решение. Данная функция определена на $\boldsymbol{R}_+ = (0; +\infty)$. Для положительных значений x выражение $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ можно заменить степенью с дробным показателем: $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$.

Применяя формулу производной степени, получим:

$$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4} x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}.$$

Ответ: $y' = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

3. Производная частного функций

Найдем сначала производную функции $\frac{1}{v}$. Понятно, что точки, в которых функция v обращается в нуль, не входят в область определения функции $\frac{1}{v}$.

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{v + \Delta v} - \frac{1}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v - (v + \Delta v)}{(v + \Delta v)v\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(v + \Delta v)v} = -v' \cdot \frac{1}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}.$$

Теперь производную частного можно найти по формуле производной произведения, заменив в ней v на $\frac{1}{v}$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Формулировка правила нахождения производной частного довольно громоздка, поэтому проще запомнить саму формулу.

П р и м е р 3. Найти промежутки монотонности, экстремумы и построить график функции $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Р е ш е н и е. Данная функция определена и непрерывна при всех x. Найдем ее производную:

$$\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2};$$

$$y' = 0 \text{ при } x = \pm 1.$$

Изобразим кривую знаков производной (рис. 62).

Функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$, убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$.

-1 — точка минимума, 1 — точка максимума функции.

$$y_{\min} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}; \quad y_{\max} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика функции: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$

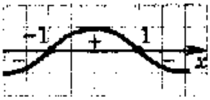


Рис. 62

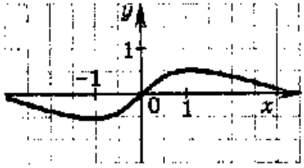


Рис. 63

График функции проходит через начало координат.

x	$(-\infty; -1]$	-1	$[-1; 1]$	1	$[1; +\infty)$	0	-2	2
Характер изменения и значения $f(x)$	$\searrow$	$-0,5$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	0	$-0,4$	$0,4$

Изобразим график функции $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (рис. 63).

Примечание. Заметив, что данная функция нечетная, можно было рассматривать только неотрицательные значения аргумента, а затем выполнить симметрию относительно начала координат.

Упражнения

102. Пользуясь результатами № 71, 72 из пункта 5, найдите производные следующих функций:

а) $y = x^2 + x^3$;
б) $y = x^3 - x^2$;
в) $y = x^3 + \sqrt{x}$;
г) $y = x^3(x^2 - 4x + 6)$;
д) $y = (2x^3 - 3x^2 + 2)\sqrt{x}$;
е) $y = (2x^3 - 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 6)$.

103. Используя формулу производной степенной функции, найдите:

а) $(x^{10})'$;
б) $(x^{17})'$;
в) $(x^{-3})'$;
г) $(x^{-10})'$;
д) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'$;
е) $\left(x^{\frac{3}{7}}\right)'$;
ж) $(x^{0,3})'$;
з) $(x^{2,7})'$;
и) $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'$;
к) $\left(x^{-\frac{3}{7}}\right)'$.

104. Найдите производные функций, определенных на $(0; +\infty)$:

а) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = \sqrt{x^5}$;
в) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
г) $y = \sqrt[6]{x^5}$;
д) $y = \dfrac{1}{x^2}$;
е) $y = \dfrac{1}{x^5}$;
ж) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
з) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

105. Функция y определена на $(0; +\infty)$. Найдите ее производную.

а) $y = 2\sqrt{x}\,(3 - 5x)$; в) $y = 0{,}5x^2(\sqrt{8x^3} + 0{,}25x^4)$;

б) $y = \sqrt{2x}\,(3x + 1)$; г) $y = \frac{x^3}{3}(\sqrt[5]{64x^7} - 0{,}2x^5)$.

106. Приведите пример какой-нибудь функции, производная y' которой равна:

а) 2; в) $3x^2 - 2x + 4$; д) $9x^2 + 6x + 1$; ж) $1{,}5x^{-0{,}5}$;

б) $2x$; г) $4x - 3$; е) $0{,}5x^{-0{,}5}$; з)* $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

107. Найдите производную функции в точке $x = 1$:

а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; в) $y = \sqrt[3]{3x^2}$;

б) $y = 6x^3 - 2x^2 + 3x - 5$; г) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{2x^3}} + 5$.

108. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$;

б) $f(x) = x^3 + x^2 - 12x - 1$ в точках с ординатой $y_0 = -1$;

в) $f(x) = 2x^5 - 10x - 3$, перпендикулярной оси ординат;

г)° $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$, параллельной прямой $y = 4x - 3$.

109. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом $45°$?

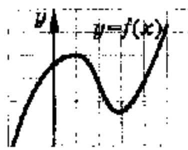


Рис. 64

110•. На рисунке 64 не изображена ось абсцисс. Определите, какие знаки должны иметь $f_{\max}(x)$ и $f_{\min}(x)$, чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело: а) один корень; б) два корня; в) три корня.

111•. Найдите число корней уравнения:

а) $x^3 + x^2 - x + 5 = 0$; б) $x^4 + x^3 - 6 = 0$; в) $x^3 - 7x + 6 = 0$.

112•. При каких значениях a уравнение $6x^3 - 2x + a = 0$ имеет: а) один корень; б) два корня; в) три корня?

113. 1) Докажите, что между двумя нулями дифференцируемой функции есть хотя бы один нуль ее производной.

2) Докажите, что между двумя минимумами непрерывная функция обязательно имеет максимум.

114. Камень, брошенный вертикально вверх, движется по закону $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $h(t)$ — высота в м через t с после начала движения, h_0 — начальная высота в м, v_0 — начальная скорость в м/с, g — ускорение свободного падения в м/с^2. Найдите:

1) скорость камня через 2 с;

2) на какой высоте скорость камня будет равна нулю, если $h_0 = 6$ м, $v_0 = 8$ м/с, $g \approx 10$ м/с^2.

115°. Количество электричества, протекающее через проводник, выражается формулой $q(t) = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите формулу зависимости силы тока I от времени и силу тока в проводнике через 3 с после начала отсчета.

116. Найдите производную функции:

а) $y = (x^2 - 3x)(x^3 - x^2)$; в) $y = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x^3} - 7x\right)$;

б) $y = \sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x^2} + x)$; г) $y = (3x - 9)^2$.

117. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{x+3}{x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

118°. Проверьте, является ли функция $f(x)$ производной функции $g(x)$:

а) $f(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$;

б) $f(x) = \frac{3-x}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$;

в) $f(x) = \frac{6+6x-2x^2}{(x^2+3)^2}$, $g(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+3}$;

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

119°. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x-4}{\sqrt{x}+1}$ в точке с абсциссой, равной 1.

120•. Докажите, что график функции $y = \frac{x+1}{x}$ пересекает прямую $y = 2x + 1$ под равными углами[1].

---

[1] Угол, под которым график пересекает прямую, — это угол между касательной к графику в точке его пересечения с прямой и самой прямой.

121. Количество электричества q, протекающего через проводник за время t, задается формулой: а) $q(t) = t + \frac{3}{t}$; б) $q(t) = 2t + \sqrt{t} + 3$. В какой момент сила тока в цепи равна нулю?

122. Найдите скорость изменения стоимости q товара при увеличении объема его производства, если стоимость в рублях изготовления x изделий находится по формуле $q(x) = 10 + 22x + \frac{x^2}{1200}$. Какова стоимость изготовления одного изделия в серии из 120 штук?

123. Лифт после включения движется по закону $s(t) = 1{,}5t^2 + 2t + 12$ (м), где t — время движения лифта в с. Найдите формулу скорости движения лифта и скорость лифта в конце второй секунды.

124. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и:

а) перпендикулярной;

б) параллельной касательной к графику функции $y = \frac{x+5}{x}$ в его точке с абсциссой, равной -1.

125°**.** Найдите координаты точки A графика функции $y = \frac{x^2}{x+1}$ на рисунке 19 (с. 28).

126. Найдите промежутки монотонности, экстремумы и постройте график функции:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$;

б) $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x - 4$;

в) $y = x^2(x-2)^2$;

г)$^{\bullet}$ $y = \frac{3x^2}{1-x}$;

д)$^{\bullet}$ $y = \frac{x^3}{4x^2+12x+9}$.

127$^{\bullet}$**.** Найдите угол между касательными, проведенными из точки (0; 2) к параболе $y = -3x^2$.

128. Найдите точки графика функции $y = \frac{x+2}{x-2}$, в которых касательные к нему образуют с осью абсцисс угол $\frac{3\pi}{4}$.

129$^{\bullet}$**.** Выведите формулу производной произведения трех функций: $(uvw)'$.

Контрольные вопросы и задания

1. Верно ли, что приращение произведения двух функций равно произведению их приращений?

2. Найдите производную функции $y = (x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x - 2)$:

а) используя правило нахождения производной произведения;

б) предварительно раскрыв скобки и приведя подобные члены.

3. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^6 - 2x + 3$, которая:

а) проходит через точку пересечения графика с осью ординат;

б) параллельна прямой $y = 4x - 3$.

8. Сложная функция

В 10 классе, еще не зная ни производной, ни возможностей ее использования для нахождения промежутков монотонности, вы использовали в различных задачах свойства основных элементарных функций. Так, например, чтобы доказать возрастание функции $y = \log_2(3^{2x-1} + 5)$ достаточно заметить, что большему значению x соответствует большее значение выражения $2x - 1$; большему значению $2x - 1$ соответствует большее значение выражения 3^{2x-1}; большему значению 3^{2x-1} соответствует большее значение выражения $3^{2x-1} + 5$, и, наконец, большему значению $3^{2x-1} + 5$ соответствует большее значение выражения $\log_2(3^{2x-1} + 5)$, т. е. самой функции y. Эти выводы основаны на том, что линейная функция $t = 2x - 1$, показательная функция $s = 3^t$, линейная функция $u = s + 5$ и логарифмическая функция $v = \log_2 u$ являются возрастающими. То есть при увеличении значений их аргументов увеличиваются и значения самих функций. Таким образом, функция $y = \log_2(3^{2x-1} + 5)$ оказывается подобно русской матрешке сложена из других, более простых функций

$$y = v(u(s(t(x)))).$$

Можно сказать, что эта *сложная функция* y составлена из функций v, u, s и t.

Рассмотрим сложную функцию $y = u(v(x))$, где функция v имеет производную в точке x, а функция u имеет производную в точке $v(x)$. Функцию u иногда называют *внешней*, а функцию v — *внутренней*. Заметим, что приращению Δx соответствует приращение Δv которому как приращению аргумента функции $u(v)$, в свою очередь, соответствует приращение Δu. Тогда:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot \Delta v} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

По условию, функция v дифференцируема в точке x, а значит, ее приращение Δv стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'_v \cdot v'_x$$

(нижние индексы показывают, по какому аргументу находится производная).

Итак,

$$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x.$$

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней.

▼ В выводе этой формулы есть небольшая тонкость — функция $v(x)$ не должна в окрестности точки x представлять собой постоянную. В противном случае приращение Δv в этой окрестности будет тождественно равно нулю, и выражение $\frac{\Delta u}{\Delta v}$ лишится смысла. △

Пример 1. Найти значение производной функции $y = (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^5$ при $x = 1$.

Решение. Функция y сложная. Она составлена из двух функций: внутренней $v = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ и внешней $u = v^5$. Применим формулу производной сложной функции:

$$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x = (v^5)'_v \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)'_x =$$

$$= 5v^4(6x^2 - 10x + 4) = 5(2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^4(6x^2 - 10x + 4).$$

Найдем $y'(1)$: $y'(1) = 5(2 - 5 + 4 - 3)^4(6 - 10 + 4) = 0$.

Ответ: $y'(1) = 0$.

▼ Пример 2. Найти уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y^2x + yx^2 = 6$, в ее точке $M(2; -3)$.

Решение. Переменная y задана уравнением $y^2x + yx^2 - 6 = 0$ *неявно*. Однако ее можно выразить из этого уравне-

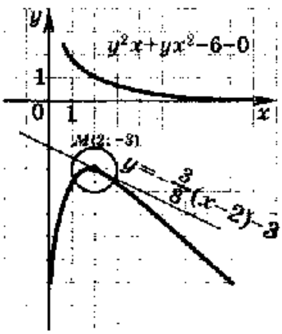


Рис. 65

ния, если рассмотреть его как квадратное относительно y: $y = \dfrac{-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 24x}}{2x}$.

Данная кривая состоит из графиков двух функций, соответствующих знакам «+» или «−» формулы (рис. 65).

График, которому принадлежит точка M, соответствует знаку «−»: $y = \dfrac{-x^2 - \sqrt{x^4 + 24x}}{2x}$.

Теперь, используя правила и формулы дифференцирования, можно найти $y'(x)$, вычислить $y'(2)$ и подставить это значение в уравнение касательной.

Однако намного проще решить эту задачу иначе.

В некоторой окрестности точки M переменная y является функцией переменной x. Используя формулу производной сложной функции, найдем производные от обеих частей данного в условии уравнения:

$$(y^2x + yx^2)' = (6)',$$
$$(y^2)'x + y^2x' + y'x^2 + y\cdot(x^2)' = 0,$$
$$2yy'\cdot x + y^2 + y'x^2 + y\cdot 2x = 0.$$

Подставим в полученное уравнение координаты точки M и найдем значение $y'(2)$:

$$2\cdot(-3)y'(2)\cdot 2 + 9 + 4y'(2) + (-3)\cdot 4 = 0,$$
$$-8y'(2) - 3 = 0, \quad y'(2) = -\frac{3}{8}.$$

Остается подставить найденный угловой коэффициент касательной в ее уравнение $y = k(x-2) - 3$, $y = -\frac{3}{8}(x-2) - 3$.

Ответ: $y = -\frac{3}{8}x - 2\frac{1}{4}$. △

Упражнения

130. Составьте сложную функцию $y = f(x)$:

а) $y = e^t$, $t = 2x + 3$;
б) $y = \sin k$, $k = x^2 + 1$;
в) $y = \ln c$, $c = \sqrt[5]{2x}$;
г) $y = 2^n$, $n = \cos m$, $m = x + 3$;
д) $y = \frac{1}{z}$, $z = d^2$, $d = 5x - 1$;
е) $y = h^5$, $h = (p + 6)^{-2}$, $p = \lg x$.

131. Выделите в сложной функции внутреннюю и внешнюю функцию:

а) $y = \log 2^x$; в) $y = 2^{x+5}$; д) $y = (\cos x + \sin x)^3$;

б) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{\sin x^3}$; е) $y = \dfrac{5}{(x^2+4x+3)^5}$.

132$^\bullet$. Дана функция $y = ||x-2|-3|$.

1) Рассматривая функцию y как сложную функцию $y = f(u(v(s(x))))$, запишите функции $s(x)$, $v(s)$, $u(v)$ и $f(u)$.

2) С каким преобразованием графика связан переход от каждой внутренней функции к внешней для нее?

3) Постройте график функции y и с помощью графика:

а) решите уравнение $||x-2|-3| = 1$;

б) найдите значение a, при котором уравнение $||x-2|-3| = a$ имеет ровно три корня.

133$^\bullet$. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$. Напишите выражение для производной функции:

а) $y = \sqrt{f(x)}$; б) $y = f(\sqrt{x})$.

134. Найдите производные функций:

а) $y = (x^4 + 6x^2 - 2x - 9)^3$; в) $y = \sqrt{(x-3)(x+3)}$;

б) $y = \left(\dfrac{1}{2x+3}\right)^4$; г) $y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)^9$.

135. Какая из функций: $y = \sqrt{x^3 + 2x + 6}$, $y = \dfrac{1}{(x^2-3x)^2}$, $y = (2x-12)^2(x^2+1)$ имеет самую большую производную в точке $x = 1$?

136$^\bullet$. При каком значении a число 2 является:

1) точкой минимума; 2) точкой максимума функции:

а) $y = (2x-a)^6(x+a)^4$; г) $y = (2x-a)^3(x+a)^4$;

б) $y = (x-a)^6(x-1)^3$; д) $y = (5x-a)^3(x+a)^5$?

в) $y = (x-a)^3(x-1)^6$;

137°. В какой из двух точек — x_1 или x_2 — производная функции y больше:

а) $y = \dfrac{(3x+1)^2}{x^2+1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$?

138$^\bullet$. Найдите угловой коэффициент общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = 3 - 2(x-6)^2$.

139°. Найдите экстремумы функции y:

а) $y = (2x^3 - 3x^2 - 12x - 2)^5$;

б) $y = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x}{2}$;

в)$^{\bullet}$ $y = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$;

г)$^{\bullet}$ $y = -\dfrac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$.

140$^{\bullet}$. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой в точке A:

а) $yx + x^2 + 4 = 0$, $A(2; -4)$;
б) $y^2x = 9$, $A(1; 3)$;
в) $y^3 - yx - 6 = 0$, $A(-1; -2)$;
г) $y^2x + 2x^2 - 5 = 0$, $A\left(-4; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

141°. Найдите уравнение касательной к кривой:

а) $y = (x^3 + 2x)^2$ в точке с абсциссой, равной -2;

б) $y = ((x + 2)^3 - 1)^2$ в точке ее пересечения с осью ординат;

в) $y = \sqrt{4 + 4x + x^2}$ в точке с абсциссой, равной 2;

г)$^{\bullet}$ $y(x^2 + 2x) = 18$ в точке с абсциссой, равной 2;

д)$^{\bullet}$ $y(x^2 - 2yx) = 3$ в точке $M(3; 1)$;

е)$^{\bullet}$ $x^3y - xy^2 = 6$ в точке $F(2; 1)$.

142. Докажите, что функция $y = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ убывающая и решите уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$.

143$^{\bullet}$. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2}$;

б) $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$;

в) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$;

г) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Возрастающей или убывающей является сложная функция, если:

а) и внешняя, и внутренняя функции возрастают;
б) внешняя функция возрастает, а внутренняя убывает;
в) и внешняя, и внутренняя функции убывают;
г) внешняя функция убывает, а внутренняя возрастает?

2. Из каких функций составлена сложная функция $y = e^{\sqrt{\lg \sin x - \lg 0,5}}$?

Найдите область ее определения, промежутки монотонности и точки экстремума.

3. Найдите касательную к кривой из примера 2 в ее точке $N(2; 1)$.

9. Формулы производных основных функций

К основным, знакомым вам элементарным функциям относятся линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Производные первых трех из этого списка вы находить научились (формулу производной степенной функции, правда, еще предстоит вывести).

Чтобы получить формулу производной показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), воспользуемся графическими соображениями.

Рассмотрим графики показательных функций при $a > 1$ и проведем к ним в их общей точке $M(0; 1)$ касательные (рис. 66). Угловой коэффициент касательной в зависимости от a может быть равен любому положительному числу. На рисунке 66 выделен график, касательная к которому имеет угловой коэффициент 1, т. е. параллельна прямой $y = x$.

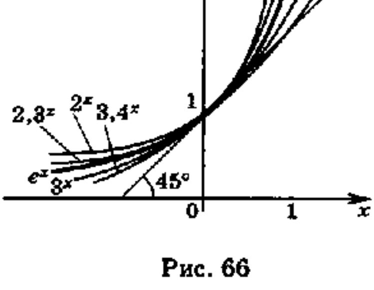


Рис. 66

Обозначим буквой e основание показательной функции, касательная к графику которой в точке с абсциссой 1 имеет угловой коэффициент, равный 1[1].

Из рисунка видно, что $2 < e < 3$. Однако это довольно грубое приближение. Познакомившись в 10 классе с числом e как основа-

---

[1] Обозначение «e» было выбрано в честь великого математика Леонарда Эйлера (1707—1783) и является первой буквой его фамилии Euler. В последней главе учебника вы увидите знаменитые формулы Эйлера, в которых это число фигурирует.

нием *натуральных* логарифмов ($\log_e x = \ln x$), вы использовали более точное приближение $e \approx 2,71$.

▼ С числом e математики познакомились не как с основанием соответствующей показательной функции, а как с пределом последовательности: $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

■ Доказательство существования этого предела довольно трудоемко, но с помощью калькулятора его можно достаточно точно вычислить. Для этого будем находить значения выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, увеличивая значения n:

$$(1+1)^1 = 2, \quad \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2,59,$$

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,70, \quad \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2,717,$$

$$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} \approx 2,7181,$$

$$\left(1 + \frac{1}{100\,000}\right)^{100\,000} \approx 2,7183 \text{ и т. д. } \triangle$$

Число e является иррациональным и не может быть выражено в виде конечной десятичной дроби, однако можно найти его приближение с любой точностью, например, $e \approx 2,718281828459045$.

Равенство единице углового коэффициента касательной к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ означает, что в этой точке значение производной равно 1: $y'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

Используя значение производной в нуле, найдем производную функции $y = e^x$ в произвольной точке x:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x.}$$

Получить формулу производной показательной функции с произвольным основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$) нам поможет формула производной сложной функции.

Поскольку $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$, имеем:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

$$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

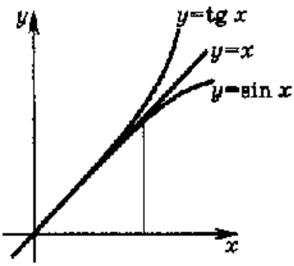


Рис. 67

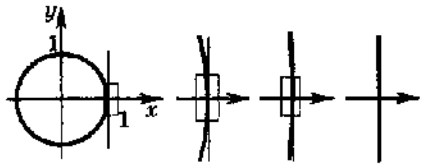


Рис. 68

Похожим способом, находя сначала угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$, можно получить формулы производных тригонометрических функций.

В 10 классе говорилось, что графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$ вблизи начала координат сливаются с прямой $y = x$ (рис. 67).

Значит, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

▼ Можно было воспользоваться тригонометрическим кругом. Поскольку ось тангенсов касается тригонометрического круга (рис. 68), то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Отсюда:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}. \ \triangle$$

Найдем теперь производную функции $y = \sin x$ в произвольной точке x:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Правила нахождения производных, тригонометрические формулы и формула производной сложной функции помогают получить производные косинуса, тангенса и котангенса.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\mathbf{(\cos x)' = -\sin x; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

Из основных элементарных функций остались логарифмическая и обратные тригонометрические функции. Выведем формулы их производных.

По определению логарифма при $a > 0$, $a \neq 1$ имеем: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$. Последнее равенство задает функцию y неявно, что, однако, не мешает найти производные от обеих его частей: $x' = (a^y)'$, $1 = a^y \ln a \cdot y'$.

Заменяя a^y на x и выражая y', получим: $1 = x\ln a \cdot y'$, $y' = \frac{1}{x\ln a}$. Конечно, следует помнить, что $D(y') = (0; +\infty)$, так как $D(\log) = \boldsymbol{R}_+$.

$$\mathbf{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.}$$

Для натурального логарифма из этой формулы получим: $(\ln x)' = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}$.

$$\mathbf{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Аналогичным способом выведем формулы обратных тригонометрических функций.

По определению арксинуса при $x \in [-1; 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеем: $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$.

Находим производные от обеих частей последнего равенства: $(\sin y)' = x'$, $\cos y \cdot y' = 1$. Поскольку при $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ значения косинуса неотрицательны, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогично получаются формулы:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Нам осталось выполнить данное в пункте 7 обещание и вывести формулу производной степенной функции $y = x^r$, где r — любое действительное число.

Рассмотрим функцию $y = x^r$ при $x > 0$. Прологарифмируем равенство $y = x^r$ и найдем производные от обеих частей:

$$\ln y = r \ln x, \ (\ln y)' = (r \ln x)', \ \frac{y'}{y} = \frac{r}{x}, \ y' = \frac{ry}{x}.$$

Заменим y его выражением через x: $y' = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}$.

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

П р и м е ч а н и е. При $x < 0$ показатель степени функции $y = x^r$ может быть только целым числом. Пользуясь свойством четности степенной функции с четным показателем, формулой производной сложной функции и свойством нечетности степени с нечетным показателем, имеем при $x < 0$ и $r = 2n$ (n — целое):

$$(x^r)' = ((-x)^{2n})' = 2n(-x)^{2n-1}(-x)' =$$
$$= -2n(-x)^{2n-1} = 2nx^{2n-1} = rx^{r-1}.$$

Если же показатель степени нечетный: $r = 2n + 1$ (n — целое), то при $x < 0$ имеем:

$$(x^r)' = (-(-x)^{2n+1})' = -(2n+1)(-x)^{2n}(-x)' =$$
$$= (2n+1)(-x)^{2n} = (2n+1)x^{2n} = rx^{r-1}.$$

Таким образом, формула производной степени распространяется и на промежуток $(-\infty; 0)$.

При $x = 0$ производная функции $y = x^r$ существует только при $r \geqslant 1$.

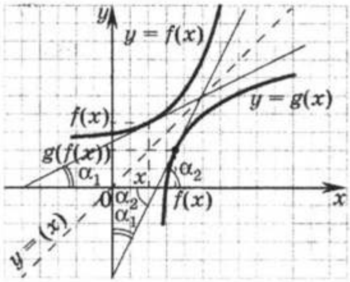


Рис. 69

▼ Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Этим фактом можно воспользоваться при выводе формулы производной обратной функции.

Сравним угловые коэффициенты симметричных касательных $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ к графикам взаимно обратных функций $f(x)$ и $g(x)$ в их точках $(x;\ f(x))$ и $(f(x);\ g(f(x)))$ соответственно (рис. 69). В силу упомянутой симметрии $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$.

Это означает, что угловые коэффициенты рассматриваемых касательных взаимно обратны. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x)$, а $\operatorname{tg}\alpha_2 = g'(f(x))$, получаем формулу производной обратной функции:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}}.$$

В этой формуле $g'(f(x))$ не производная сложной функции, а значение производной функции g в точке $f(x)$.

Пусть теперь $f(x) = \log_a x$, а $g(t) = a^t$. Зная производную функции $g(t)$: $g'(t) = (a^t)' = a^t \ln a$, из формулы производной обратной функции получим при значении $t = f(x) = \log_a x$:

$$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x}\ln a} = \frac{1}{x\ln a}}. \ \triangle$$

Упражнения

144°. Вычислите пределы:

1) а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

г)• $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;

2) а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{4x}$;

в)• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x}$;

г)• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 4x$.

3)● а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

145. Функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, напишите выражение для производной функции y:

а) $y = e^{f(x)}$; в) $y = \ln f(x)$;

б) $y = f(e^x)$; г) $y = \sin f(x)$.

146. Найдите производную функции:

а) $y = e^{-x}$; в)● $y = \frac{2^x}{3^x}$;

б) $y = e^{4-5x}$; г) $y = x^2 \cdot 5^{3x}$.

147●. Найдите скорость радиоактивного распада цезия-135, зная, что период его полураспада 31 год.

148. Сила тока изменяется в зависимости от времени по закону $I = 2^{2-t}$, где t — время в секундах. Найдите скорость изменения силы тока в конце четвертой секунды.

149●. Укажите интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции:

а) $y = xe^{-3x}$; в) $y = x^2 - \ln x^2$;

б) $y = \frac{x^2}{2^x}$; г) $y = 2\ln(x-2) - x^2 + 4x + 1$.

150. Исследовав с помощью производной функцию $f(t) = \log_t(t+1)$ на монотонность:

1)● сравните числа $\log_9 10$ и $\lg 11$;

2)* решите уравнение $\log_{6-x}\log_2 x = \log_{7-x}\log_2 2x$.

151. Найдите производную функции:

а) $y = 4\sin x - \cos x$; д)○ $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$;

б) $y = \cos(2x - 4)$; е)○ $y = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{x}$;

в) $y = \cos x \sin x$; ж)○ $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

г) $y = \operatorname{tg} x^3$; з)○ $y = 2\operatorname{arcctg}\frac{\ln x}{x}$.

152. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции y равна нулю:

а) $y = 5 + 8\cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$; в)$^{\circ}$ $y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$;

б) $y = 1 + 4\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$; г)$^{\circ}$ $y = 5x + \sin 2x - 4\sqrt{3}\sin x$.

153. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s = 2 - 2\cos 2t$, в момент времени $t = \frac{\pi}{6}$.

154. Составьте уравнение касательной к графику функции y в точке x_0:

а) $y = \sin^3 x$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$; в) $y = \mathrm{tg}^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

б) $y = \cos^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; г) $y = \sqrt[3]{\mathrm{ctg}\, x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

155$^{\bullet}$. Исследуйте с помощью производной следующие функции и постройте их графики:

а) $y = \sin x + \cos x$; в) $y = x + 2\sin x$;

б) $y = x + \sin x$; г) $y = 2^x \cos x$.

156. Докажите, что функция:

а) $y = 2x - \sin x$ является возрастающей;

б)$^{\bullet}$ $y = x - \cos x$ является возрастающей;

в) $y = \frac{1}{x+2}$ убывает на промежутке $(-2; +\infty)$;

г)$^{\bullet}$ $y = \mathrm{tg}\, x - x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает.

157$^{\bullet}$. Найдите, при каких значениях a функция

$f(x) = \sin x - ax$ убывает на всей числовой прямой.

158. Под каким углом пересекает ось абсцисс:

а) синусоида $y = \sin x$;

б) тангенсоида $y = \mathrm{tg}\, x$?

159. К графику функции $y = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Параллельны ли эти касательные между собой?

160. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 6\sin x - \cos x$ в его точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

161$^\bullet$. Определите, имеет ли функция y максимум или минимум:

а) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; в) $y = 2^{-x^2}$;

б) $y = \cos^2 x + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

162$^\bullet$. **Запишите какую-нибудь пару взаимно обратных функций $f(x)$ и $g(x)$, если:**

а) $f'(x) = 3$; в) $f'(x) = 2e^{2x}$;

б) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

163$^\bullet$. **Найдите промежутки возрастания и убывания функции:**

а) $y = 2x - \ln x$; г) $y = \frac{x^2}{2^x}$;

б) $y = \frac{x}{\ln x}$; д) $y = -\frac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$;

в) $y = \lg^2(x+2)$; е) $y = \log_{0,5}(2x^2 - 3x - 2)$.

164. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

б)$^\circ$ $f(x) = 3^x + 3^{-2x}$, $x_0 = 1$;

в)$^\circ$ $f(x) = \sqrt{4 - 2x - x^2}$, $x_0 = 0$.

165$^\bullet$. Найдите угол между касательными к кривой $y = \ln x$ в точках с абсциссами $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

166$^\bullet$. **В каких точках график функции $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные?**

167°. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ в точке ее максимума.

168$^\bullet$. **Докажите, что функция $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + 2\,\mathrm{arctg}\, x$ постоянная при всех $x \in [1; +\infty)$.**

169. Найдите приближенно:

а) $(0{,}998)^4$; б) $\sqrt[3]{1{,}003}$; в) $\lg 102$.

170°. **Исследуйте функцию $y = x^p e^{-x}$ на монотонность и постройте ее график при $p = 2$.**

171$^\bullet$. 1) Докажите, что при любом неотрицательном значении x верно неравенство:

а) $e^x \geqslant 1 + x$; в) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

б) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

2) Выявите закономерность составления этих неравенств и запишите следующее неравенство.

172. Докажите, что для любого неотрицательного значения x верно неравенство $\ln(1 + x) \geqslant \frac{2x}{x+2}$.

173$^\bullet$. Составьте уравнения касательных к графику функции $f(x)$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью S:

а) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $S = 2$;

б) $f(x) = \sqrt{1-2x^2}$, $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

174$^\bullet$. Найдите все точки графика функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28,$$

в каждой из которых касательная к нему отсекает от положительных координатных полуосей равные отрезки.

175°. Найдите абсциссу точки графика функции $y = f(x)$, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен k, если:

а) $f(x) = 10 - e^{4-0,1x}$, $k = 0,1$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = \frac{x^2+14}{x+2}$, $k = -1$;

г) $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 2\sqrt{3} - 3$, $k = 0$.

176. Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие отрезку L, если:

а) $f(x) = \cos^2 x + \sin x - 5$, $L = [0; 2]$;

б) $f(x) = \sin^2 x - \cos x + 4$, $L = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

177$^\bullet$. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = p(x)$ образует в верхней координатной полуплоскости острый угол с положительным направлением оси абсцисс, если:

а) $p(x) = x^4 - x^3$; в) $p(x) = \sqrt{2x - 3}$;

б) $p(x) = \operatorname{tg} x - 2x$; г) $p(x) = x + \ln(-x)$.

178$^\bullet$. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = p(x)$ образует в верхней координатной полуплоскости тупой угол с положительным направлением оси абсцисс, если:

а) $p(x) = x \ln x - 3x$; в) $p(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$;

б) $p(x) = -4\cos x + 2x$; г) $p(x) = x^2e^x$.

179$^\bullet$. При каких значениях x:

а) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, $g(x) = 2x + 8$;

б) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$;

в) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = 3x + 81$, $g(x) = \operatorname{tg} x$;

г) $f'(x) \geqslant g'(x)$, если $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right)$, $g(x) = 3 - x\sqrt{2}$?

180$^\bullet$. 1) Найдите производную бесконечно колеблющейся функции $y = \begin{cases} x + x^2 \sin\dfrac{5}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$ упомянутой в пункте 6:

а)$^\circ$ при $x \neq 0$; б)$^\bullet$ при $x = 0$.

2)* Докажите, что эта функция не является монотонной ни на одном из промежутков, содержащих точку $x = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие свойства и формулы использованы в примечании при выводе производной степенной функции с нечетным показателем степени для отрицательных значений x?

2. Что можно сказать о значении сложной функции, внешняя и внутренняя функции которой взаимно обратны?

3. Докажите, что функции: $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = x^3 + x + 5$; $y = -\dfrac{1}{x^3}$ не имеют экстремумов.

4. Выведите формулу производной функции $y = \operatorname{arctg} x$.

10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Решение многих задач приводит к необходимости нахождения наибольшего или наименьшего значений того или иного выражения. Некоторые из таких задач можно решить без привлечения методов математического анализа. Так, например, вы знаете, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a < 0$ принимает свое наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$ (абсцисса вершины соответствующей параболы), а сумма положительных значений обратно пропорциональных переменных минимальна при их равенстве.

Задачи на максимум и минимум всегда привлекали внимание математиков. Знаменитые Аполлоний, Архимед и Евклид уже в Древней Греции находили наибольшие площади и объемы. Однако только в XVII в. П. Ферма[1], И. Кеплер[2] и, наконец, Г. Лейбниц и И. Ньютон разработали общий подход к нахождению наибольших и наименьших значений функции. Этот подход связан с применением производной. Ему, в основном, и посвящен этот пункт.

Если функция $y = f(x)$ рассматривается на отрезке, то свое наибольшее или наименьшее значение на нем она может принимать либо в его концах, либо в критических точках. Действительно, поскольку ни в точке убывания (где $y' < 0$), ни в точке возрастания (где $y' > 0$) значение функции не является ни наибольшим, ни наименьшим, остаются только концы отрезка и критические точки.

---

[1] Пьер Ферма́ (1601—1665), работая советником парламента в Тулузе, прославился как великий математик, которого заслуженно считают предвестником математического анализа. Он участвовал в создании общих методов решения задач на максимум и минимум, разработал приемы построения касательных к кривым, вычисления площадей криволинейных фигур и длин кривых. Открытия Ферма становились известными из его переписки с другими математиками.

[2] Иоган Ке́плер (1571—1630) известен как немецкий астроном, открывший законы движения планет, и математик, разработавший теорию использования логарифмов для вычислений и составивший таблицы логарифмов, а также предложивший интересный способ определения объемов тел.

На рисунке 70 наибольшее значение функция принимает в точке x_2, а наименьшее — в точке b, правом конце отрезка. Это можно записать так: $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_2)$, $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$.

З а м е ч а н и е. Непрерывная на отрезке функция обязательно принимает на нем и свое наибольшее, и свое наименьшее (для этого отрезка) значения. А вот разрывная функция может не иметь на отрезке ни наибольшего, ни наименьшего значений (рис. 71).

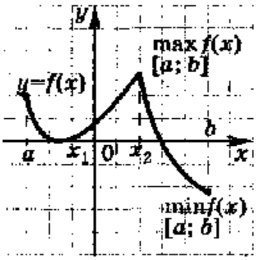


Рис. 70

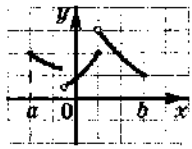


Рис. 71

П р и м е р 1. Найти наименьшее и наибольшее из значений, которые принимает функция $f(x) = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2; 3]$.

Р е ш е н и е.

① Найдем критические точки функции на отрезке $[-2; 3]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3;\ f'(x) = 0:\ x = -1 \text{ или } x = 1.$$

② Найдем значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-2) = 1,\ f(-1) = 5,\ f(1) = 1,\ f(3) = 21.$$

③ Сравним найденные значения функции:

$$f(-2) = f(1) < f(-1) < f(3).$$

О т в е т: $\max\limits_{[-2;\,3]} f(x) = f(3) = 21$, $\min\limits_{[-2;\,3]} f(x) = f(-2) = f(1) = 1$.

П р и м е ч а н и е. Заметим, что отрезок, концами которого являются наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции, представляет собой ее область значений.

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения часто приводят к рассмотрению функции на промежутке (конечном или бесконечном), где у нее есть *единственная* критическая точка.

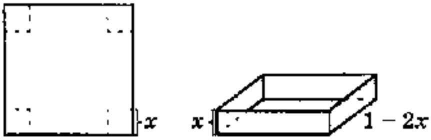


Рис. 72

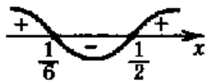


Рис. 73

Если в единственной критической точке непрерывная функция имеет максимум, то он является наибольшим, а если минимум, то наименьшим ее значением.

Пример 2. Из квадратного листа картона 1 × 1 м вырезают по углам квадраты и, как показано на рисунке 72, сгибают коробку. Какие стороны должны иметь отрезанные квадраты, чтобы объем полученной коробки был наибольшим?

Решение.

1 Обозначим искомую сторону буквой x и выразим объем коробки как функцию с аргументом x: $V(x) = (1 - 2x)^2 x$.

Понятно, что коробка, а вместе с ней и ее объем могут существовать только, когда $0 < x < 0{,}5$. Значит, $D(V) = (0; 0{,}5)$.

2 Найдем наибольшее значение функции $V(x)$.

$$V' = ((1 - 2x)^2 x)' = (x - 4x^2 + 4x^3)' = 1 - 8x + 12x^2;$$

$$V' = 0\colon 12x^2 - 8x + 1 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{2} \text{ (рис. 73).}$$

В области определения оказалась единственная критическая точка — точка максимума $x = \frac{1}{6}$. Значит, в этой точке функция $V(x)$ принимает свое наибольшее значение.

Ответ: $\frac{1}{6}$ м.

Упражнения

181. На рисунке 74 изображены графики функций. Какие из этих функций имеют наибольшие (наименьшие) значения и чему эти значения равны?

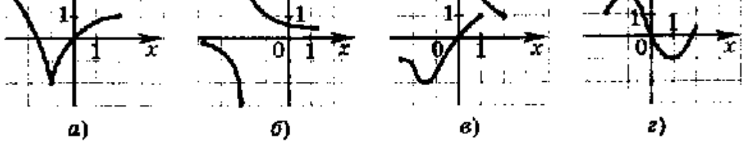


Рис. 74

182. Найдите наименьшее и наибольшее из значений, которые принимает функция $f(x)$ на отрезке L, если:

а) $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$, $L = [1; 4]$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x$, $L = [0; 9]$;

в) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $L = [1; 2]$;

г) $f(x) = x - 2\ln x$, $L = \left[\frac{3}{2}; e\right]$;

д) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $L = \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

е) $f(x) = (x - 3)e^x$, $L = [1; 4]$;

ж) $f(x) = \sqrt{5 - 4\sin x}$, $L = [0; \pi]$;

з) $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$, $L = [-1; 1]$.

183°. Найдите область значений функции $y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 2}$.

184•. Пересекает ли прямая $y = 1{,}3$ график функции $y = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 3}$?

185•. Найдите:

а) наименьшее значение функции $y = 2^x + 2^{-x}$;

б) область значений функции $y = \cos^2 x + \cos x + 3$.

186. При каких значениях a имеет решение уравнение $\sqrt{3x - 3} + \sqrt{5 - x} = a$?

187. Найдите положительное число, которое даст:

а) наименьшую сумму с обратным ему числом;

б) наибольшую разность со своим кубом;

в) наибольшую разность со своим квадратом.

188. 1) Сумма двух положительных чисел равна 10. Найдите эти числа, если сумма квадрата первого из них с кубом второго принимает наименьшее из всех возможных значений.

2) Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и второго, возведенного в четвертую степень, было наибольшим.

3) Число 147 разбейте на два положительных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на квадратный корень из другого было наибольшим.

4) Число e представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого оказалась наименьшей.

189$^{\bullet}$. В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y = (x - 2)^2$, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и положительными полуосями координат, была наибольшей?

190$^{\bullet}$. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник с наименьшей площадью.

191. Из всех прямоугольников данного периметра найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

192. Прямоугольный лист жести имеет длину 64 см и ширину 40 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом к основанию. Какими следует взять стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки (объем прямоугольного параллелепипеда) оказалась максимальной.

193$^{\bullet}$. Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данный круг, наибольшая площадь у равностороннего треугольника.

194. При каких размерах прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и площадью полной поверхности S имеет наибольший объем?

195. Из прямоугольной полосы жести шириной 4 дм требуется изготовить желоб прямоугольного сечения. Определите наибольшую площадь поперечного сечения желоба.

196$^{\bullet}$. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Какими должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

197°. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a укажите треугольник наибольшей площади.

198$^{\bullet}$. На окружности радиуса 4 см взяты точки A, B и C так, что хорда BC перпендикулярна касательной, проведенной к окружности в ее точке A, и треугольник ABC имеет наибольшую возможную при этом площадь. Найдите площадь треугольника ABC.

199$^{\bullet}$. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник со сторонами a, b и c, если $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$, $c \leqslant 7$?

200$^{\bullet}$. Найдите высоту и радиус основания цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность, из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H.

201$^\bullet$. Найдите радиус основания цилиндра, имеющего наибольший объем из всех вписанных в шар радиуса R.

202$^\bullet$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке L:

а) $y = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$, $L = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$;

б) $y = x + \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 2x + 1)}$, $L = \left[-4; -\frac{5}{4}\right]$;

в) $y = 1 + 4\sin x - 2x$, $L = [0; \pi]$.

203*. Найдите большее из чисел a и b, если:

а) $a = e^{\frac{1}{e}}$, $b = \pi^{\frac{1}{\pi}}$; б) $a = e^{\pi}$, $b = \pi^{e}$.

204$^\bullet$. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N, которые лежат на графиках функций:

а) $y = x + 5$ и $y = 4x - x^2$;

б) $y = x^2 + 1$ и $y = \sqrt{x - 1}$;

в) $y = e^x$ и $y = \ln x$.

205°. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше 1. Какова должна быть разность этой прогрессии, чтобы произведение первого, четвертого и пятого ее членов стало наибольшим?

206°. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$(м), где t — время в секундах.

а) В какой момент времени t скорость движения точки будет наибольшей?

б) Какова величина этой наибольшей скорости?

207$^\bullet$. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещенность тетради, лежащей на краю стола, будет наилучшей (освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

208$^\bullet$. Энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется из равенства $P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$, где E и r — постоянные величины. При каком соотношении между R и r величина P максимальна?

209. Нужно огородить проволочной сеткой длиной a прямоугольный участок, прилегающий к стене. Найдите размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей.

210°. Требуется изготовить из жести открытый цилиндрический сосуд вместимостью 2 *л*. Какой должна быть высота сосуда, чтобы расход жести был наименьшим?

211°. Какими должны быть размеры цилиндрической консервной банки для того, чтобы она имела максимальный объем при расходе S м^2 жести на ее изготовление?

212. Из круглого бревна диаметром d нужно вырезать балку одинакового по всей длине прямоугольного сечения. Зная, что сопротивление на сжатие пропорционально площади сечения, определите, каковы должны быть стороны прямоугольного сечения, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим.

213$^{\bullet}$. К реке, имеющей ширину a, подходит под прямым углом канал шириной b. Какую наибольшую длину может иметь судно, вошедшее из реки в канал (осадкой судна и его шириной пренебречь)?

214$^{\bullet}$. Коридор шириной 2 м и высотой 3 м поворачивает под прямым углом. Какова наибольшая длина деревянного бруса, который можно пронести по этому коридору?

215°. Стоимость плавания корабля в зависимости от времени определяется формулой $C(t) = (a + bv^3)t$, где a и b — постоянные, v — скорость корабля, а t — время движения (первое слагаемое связано с расходом на амортизацию и содержание команды, а второе — с расходом топлива). При какой скорости судно пройдет расстояние s с наименьшими затратами?

216°. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно с одинаковой скоростью v км/ч. В некоторый момент времени один самолет оказался в точке пересечения линий движения, а второму до нее осталось a км. Через сколько времени после этого расстояние между самолетами окажется наименьшим и чему оно будет равно, если направления движения самолетов образуют угол в 120°?

Контрольные вопросы и задания

1. В чем различие между понятиями максимума и наибольшего значения, минимума и наименьшего значения? В каких случаях наименьшее значение функции не является ее минимумом? Нарисуйте график функции, у которой максимум меньше наибольшего значения, а минимум равен наименьшему значению.

2. Докажите, что если функция, имеющая непрерывную производную, имеет единственный экстремум, являющийся максимумом, то он совпадает с наибольшим значением этой функции.

3. Приведите пример функции, наибольшее значение которой можно найти без помощи производной.

4. Найдите наименьшее из значений, которые принимает функция $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

11. Вторая производная

Для отыскания промежутков монотонности и экстремумов мы находили производную функции и выясняли, на каких промежутках ее значения положительны, отрицательны, в каких точках она обращается в нуль или не существует. Полученные результаты, в частности, помогали при построении графиков функций. Оказывается, что важную информацию о графике функции можно получить, исследуя не только значения, но и характер изменения производной, т. е. где она возрастает или убывает и где обращается в нуль. Поскольку производная функции сама является функцией, естественно при этом исследовании использовать ее производную.

Производная от первой производной функции $y = f(x)$ называется второй производной функции $y = f(x)$ и обозначается с помощью двух штрихов:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

В этом пункте мы будем говорить о функциях, имеющих вторую производную.

График функции, изображенный на рисунке 75, располагается над, а на рисунке 76 — под любой из проведенных к нему касательных. Говорят, что первая кривая **вогнута**, а вторая **выпукла**.

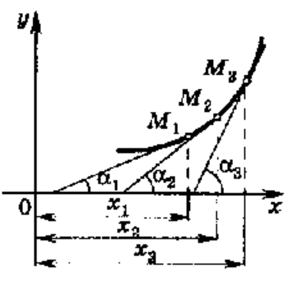


Рис. 75

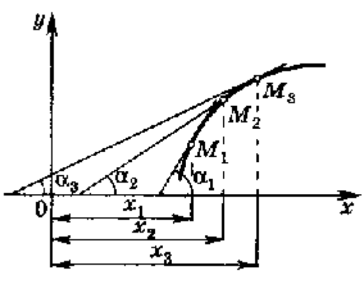


Рис. 76

Можно заметить, что при увеличении абсциссы точки касания угловой коэффициент касательной к вогнутой кривой увеличивается, а к выпуклой кривой уменьшается.

Поскольку угловой коэффициент касательной является производной функции, можно сказать, что на промежутке, где производная возрастает, график функции вогнутый, а на промежутке убывания производной он выпуклый. Связывая промежутки монотонности первой производной со знаком второй производной, можно сказать, что

на промежутке, где вторая производная принимает только положительные [*отрицательные*] *значения, функция вогнута* [*выпукла*].

На одних промежутках функция может быть выпуклой, а на других — вогнутой. Соответствующие участки ее графика разделяются *точками перегиба*. Касательная к графику функции в точке перегиба пересекает его (рис. 77). Понятно, что в точке перегиба вторая производная обращается в нуль, либо не существует[1]. Так начало координат является точкой перегиба знакомого вам графика функции $y = \sqrt[3]{x}$, а ни первой, ни тем более второй производной при $x = 0$ у этой функции нет. На рисунке 77 точка перегиба $x = b$ разделяет промежутки выпуклости $(a; b)$ и вогнутости $(b; c)$.

Пример 1. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$, а также точки перегиба ее графика.

Решение. Найдем вторую производную данной функции:

$$y'' = (4x^3 - 3x - 4)' = 12x^2 - 3.$$

Найдем нули второй производной и промежутки ее знакопостоянства: $y'' = 0$: $12x^2 - 3 = 0$, $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0{,}5$ (рис. 78).

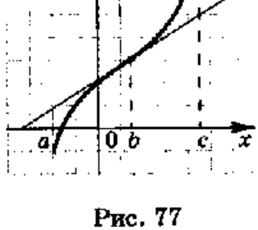


Рис. 77

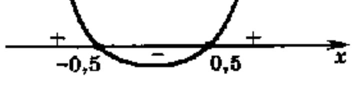


Рис. 78

[1] Обратное утверждение неверно. Так, например, вторая производная функции $y = x^4$ при $x = 0$ обращается в нуль, а сама функция всюду вогнута. Чтобы был перегиб, вторая производная при переходе через соответствующую точку должна изменить свой знак.

Вторая производная положительна на $(-\infty; -0{,}5)$ и на $(0{,}5; +\infty)$, отрицательна на $(-0{,}5; 0{,}5)$ и обращается в нуль в точках $-0{,}5$, $0{,}5$. Следовательно, данная функция вогнута на $(-\infty; -0{,}5]$ и на $[0{,}5; +\infty)$, выпукла на $[-0{,}5; 0{,}5]$, а ее точки перегиба имеют абсциссы $-0{,}5$ и $0{,}5$.

▼ Пример 2. Сравнить значения выражений

$$\cos^3 1 + \cos^3 1{,}4 \text{ и } \cos^3 1{,}05 + \cos^3 1{,}35.$$

Решение. Рассмотрим на интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, которому принадлежат аргументы косинусов, функцию $y = \cos^3 x$. На этом интервале функция убывает, так как ее производная $y' = -3\cos^2 x \sin x$ отрицательна.

Найдем вторую производную: $y'' = 6\cos x \cdot \sin^2 x - 3\cos^3 x = 3\cos x(2\sin^2 x - \cos^2 x)$. На рассматриваемом интервале $y'' > 0$, значит функция y вогнута. По теореме Лагранжа получаем: $\frac{y(1) - y(1{,}05)}{1 - 1{,}05} = y'(a)$ и $\frac{y(1{,}35) - y(1{,}4)}{1{,}35 - 1{,}4} = y'(b)$, где a — некоторое число из интервала $(1; 1{,}05)$, а b — из интервала $(1{,}35; 1{,}4)$. В силу возрастания производной $y'(a) < y'(b)$, т. е. $\frac{y(1) - y(1{,}05)}{-0{,}05} < \frac{y(1{,}35) - y(1{,}4)}{-0{,}05}$ и $y(1) - y(1{,}05) > y(1{,}35) - y(1{,}4)$. Отсюда $\cos^3 1 + \cos^3 1{,}4 > \cos^3 1{,}05 + \cos^3 1{,}35$. △

В окрестности точки экстремума функция обычно или выпукла (максимум) или вогнута (минимум), поэтому вторую производную можно использовать при поиске экстремумов:

если в критической точке вторая производная положительна [отрицательна], то функция в этой точке имеет минимум [максимум].

Пример 3. Найти наименьшее значение функции $y = x\ln x - x\ln 5$ на отрезке $[1; 5]$.

Решение. Найдем критические точки данной функции, принадлежащие отрезку $[1; 5]$. $y' = \ln x + 1 - \ln 5$.

$$y' = 0\colon \ln x = \ln 5 - 1,\ x = \frac{5}{e}.$$

Поскольку $1 < \frac{5}{e} < 5$, критическая точка принадлежит отрезку $[1; 5]$. Выясним, какой знак в найденной точке у второй производной: $y'' = (\ln x + 1 - \ln 5)' = \frac{1}{x}$, $y''\left(\frac{5}{e}\right) = \frac{e}{5} > 0$. Оказалось, что $x = \frac{5}{e}$ — точка минимума. Поскольку это единственная точка экстремума, то непрерывная функция $y = x \ln x - x \ln 5$ принимает в ней свое наименьшее значение:

$$\min_{[1;\,5]} y = \frac{5}{e}\ln\frac{5}{e} - \frac{5}{e}\ln 5 = \frac{5}{e}\,(\ln 5 - 1 - \ln 5) = -\frac{5}{e}.$$

Ответ: $-\frac{5}{e}$.

Нельзя обойти вниманием физический смысл второй производной. Пусть точка M движется по прямой с выбранным на ней началом отсчета — точкой O. Расстояние от начала отсчета до точки M в каждый момент времени t обозначим буквой s. Тогда движение точки M будет описываться функцией $s = s(t)$. Первая производная функции s, как вы знаете, выражает скорость движения $v(t)$, а вторая производная (скорость изменения скорости) является ускорением:

$$s''(t) = v'(t) = a(t).$$

Пример 4. Найти ускорение тела, движущегося прямолинейно по закону $s(t) = 3t^2 - \ln t^2$ (м), где t с — время движения, через 2 с после начала движения.

Решение. Ускорение равно второй производной:

$$a(t) = (3t^2 - \ln t^2)'' = \left(6t - \frac{2}{t}\right)' = 6 + \frac{2}{t^2},$$

$$a(2) = 6 + \frac{2}{4} = 6{,}5.$$

Ответ: 6,5 м/с^2.

Рассмотрим теперь колебания груза, прикрепленного к пружине (рис. 79).

Груз скользит по стержню под действием силы сжатия пружины, которая пропорциональна (с учетом знака) отклонению $y(t)$ от положения равновесия (силой трения в этой задаче пренебрегаем):

$$F = -ky.$$

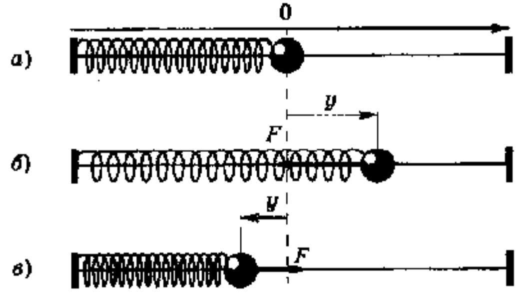


Рис. 79

С другой стороны по закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение:

$$F = ma = my''.$$

Имеем:

$$my'' = -ky.$$

В этом уравнении неизвестным является сама функция $y(t)$. Поскольку она выражается через свои производные, уравнение называют *дифференциальным*.

Решению дифференциальных уравнений посвящен целый раздел математики — с ним вы познакомитесь в вузе. Что касается данного уравнения, его решением является функция

$$y = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega^2 = \frac{m}{k}$.

Говорят, что тело, движение которого описывается такой функцией, совершает *гармонические колебания*. Число A показывает предельное отклонение от положения равновесия — его называют *амплитудой*. Число ω называют *частотой*, через него легко выразить *период* гармонических колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Число φ зависит от выбора начального момента отсчета — его называют *начальной фазой*.

Упражнения

217. Найдите вторую производную функции $f(x)$ и вычислите ее значения:

а) $f(x) = x^2 \ln x + \cos 2x$, $f''(1)$, $f''(\pi)$;

б) $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \ln x^2$, $f''(3)$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

218. Найдите промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции:

а) $y = x^3$;

б) $y = (x + 1)^4$;

в) $y = 3x^2 - x^3$;

г) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$;

д) $y = x + 2\cos x$.

219. Узнайте, выпукла или вогнута функция $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ в точках: а) $x = 1$; б) $x = 2$?

220°. Постройте графики функций, проведя исследование с помощью первой и второй производных:

а) $y = \sqrt{1 + x^2}$; в) $y = e^{-x^2}$;

б) $y = x + \sin x$; г) $y = \ln(1 + x^2)$.

221•. Исследуйте на выпуклость функции $y = x^{100}$ и $y = \sqrt[2004]{x}$. Используйте полученные результаты для сравнения чисел:

а) $\dfrac{3^{100} - 2^{100}}{2}$ и $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{100}$; б) $\dfrac{\sqrt[2004]{0{,}3} + \sqrt[2004]{0{,}7}}{2}$ и $\sqrt[2004]{0{,}5}$.

222•. Сравните значения выражений

$$\sin^3 0{,}1 + \sin^3 0{,}5 \text{ и } \sin^3 0{,}2 + \sin^3 0{,}4.$$

223. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке L:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$, $L = [-2; 1]$;

б) $y = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x}{2}$, $L = [0; 2{,}5]$;

в)• $y = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$, $L = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

г)• $y = -\dfrac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$, $L = [2; 3]$.

224•. Найдите наименьшее значение функции y на отрезке L:

а) $y = 2x\ln x - x\ln 49$, $L = [1; 4]$;

б) $y = \dfrac{1}{2}x\ln x - x\ln 2$, $L = [0{,}5; 2]$.

225•. Докажите, что функция $y = \begin{cases} x + x^2\sin\dfrac{5}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$

не имеет второй производной в точке $x = 0$.

226. Найдите скорость и ускорение тела, движущегося прямолинейно по закону $s(t)$ в указанные моменты времени t:

а) $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$ (м), $t = 2$ с;

б) $s(t) = 3\cos\dfrac{\pi t}{3}$ (м), $t = 1$ с.

227○. Тело движется по закону $s(t) = 0{,}5t^4 - 5t^3 + 12t^2 - 1$. В какие моменты времени ускорение тела равно нулю?

228. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \sqrt[3]{t^2}$. Докажите, что его ускорение обратно пропорционально квадрату пройденного расстояния.

229°. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ и $s_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$. Найдите ускорение точек в момент, когда равны их скорости (расстояние измеряется в метрах, время в секундах).

230. Пуля, попав в твердое тело, движется в нем по закону $s = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0t)$, где v_0 — скорость, с которой пуля входит в тело, k — постоянная положительная величина. Найдите закон изменения ускорения движения пули.

231. Тело массы m движется прямолинейно по закону $s = at^2 + bt + c$, где a, b и c — постоянные величины. Докажите, что сила, действующая на это тело, постоянна.

232. Найдите скорость и ускорение, которые имеет точка, движущаяся по закону:

а) $s = \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$; б) $s = 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$,

в момент времени $t = 1$.

233. Найдите силу F, действующую на тело массы m, которое движется прямолинейно по закону, заданному уравнением $s(t)$ в момент времени t:

а) $s(t) = \sin 2t$, $t = \frac{\pi}{8}$; б) $s(t) = e^{2t}$, $t = 0$.

234. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $s = A\cos(\omega t + \alpha)$, где A — амплитуда, ω — частота, α — начальная фаза колебания. Составьте формулы скорости и ускорения движения точки.

235. Определите силу, под действием которой тело массы m совершает гармонические колебания по закону

$$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha).$$

236°. Постройте график гармонического колебания, заданного формулой:

а) $s(t) = \frac{1}{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $s(t) = -3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

237. Докажите, что функция y является решением дифференциального уравнения гармонического колебания:

а) $y = -4\sin(2x + 3)$, $y'' + 4y = 0$;

б) $y = 3{,}8\cos(0{,}6x - 10)$, $y'' + 0{,}36y = 0$.

238$^{\bullet}$. Постройте графики функций, определяя их асимптоты, экстремумы и точки перегиба:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$; г) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Покажите на графике убывающей дифференцируемой вогнутой функции, что угловые коэффициенты касательных к нему увеличиваются при увеличении абсциссы точки касания.

2. Сделайте эскиз графика какой-нибудь функции, производная которой в точке перегиба: а) равна нулю; б) положительна; в) отрицательна; г) не существует.

3. Исследуйте на монотонность, выпуклость и вогнутость функцию $y = x^4 - 6x^2 + 1$ и постройте ее график.

4. Докажите, что если точка движется прямолинейно по закону $s(t) = ae^t + be^{-t}$, то ее ускорение равно пройденному пути.

ГЛАВА

4

ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

В предыдущих двух главах вы находили производные различных функций. В этой главе рассматривается обратная задача — вы научитесь по данной производной находить функцию, от которой она была взята, и познакомитесь с некоторыми ситуациями, в которых применяется это умение. В пункте 12 речь пойдет о задачах, которые приводят к интегралам как суммам бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, а пункт 13 научит вас вычислять некоторые из этих интегралов.

12. Площадь криволинейной трапеции

Фигура $ABCD$ на рисунке 80 снизу ограничена осью абсцисс, сверху — графиком функции $y = f(x)$, а слева и справа — параллельными прямыми $x = a$ и $x = b$. Параллельность сторон AD и BC вызывает ассоциации с трапецией, отличие лишь в стороне DC: у трапеции это отрезок, а у фигуры на рисунке — часть графика функции $y = f(x)$.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями: $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$ и принимающая на нем только неотрицательные значения.

Рисунки 81—82 иллюстрируют способ приближенного вычисления площади криволинейной трапеции: разбиение на несколько криволинейных трапеций, замена их прямоугольниками, нахождение высот, а затем и площадей этих прямоугольников.

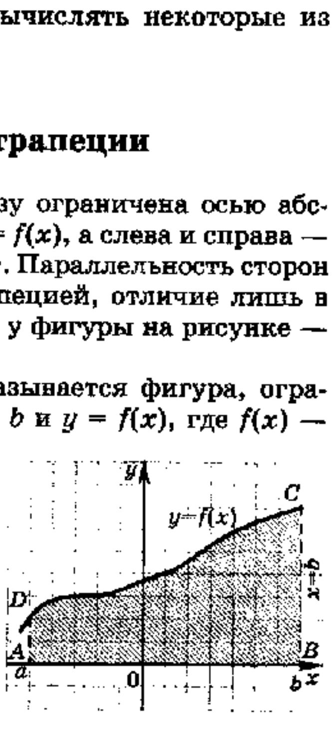


Рис. 80

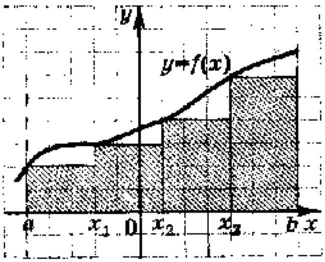


Рис. 81

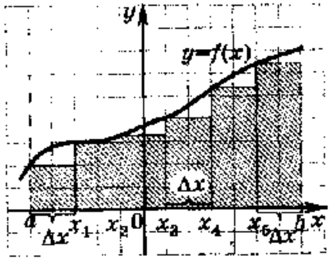


Рис. 82

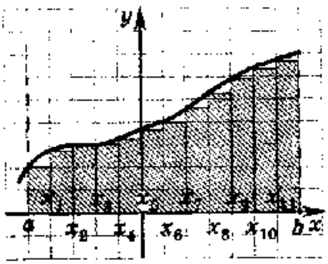


Рис. 83

Так, для разбиения на рисунке 82, используя для равных оснований прямоугольников обозначение Δx, получим:

$$S_{ABCD} \approx f(a) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x +$$
$$+ f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x + f(x_5) \cdot \Delta x.$$

При увеличении числа частей n, на которые разбивается трапеция, погрешность приближения уменьшается, и ее можно сделать как угодно малой, взяв n достаточно большим.

Поскольку при увеличении n значение $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ стремится к нулю, можно записать:

$$S_{ABCD} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x\right).$$

Сумму, стоящую под знаком предела, называют ***интегральной***, концы отрезка $[a; b]$ — границами (или пределами) интегрирования, а сам предел называют ***интегралом*** и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$ (читается: *интеграл от a до b эф от икс дэ икс*)[1].

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

[1] Знак интеграла, представляющий собой удлиненную букву S, был введен Лейбницем в 1686 г. Термин «интеграл» от латинского слова *integer* — целый (с помощью интеграла находится площадь целой фигуры) предложил И. Бернулли, сотрудник Лейбница. Определение интеграла как предела суммы принадлежит Б. Риману, поэтому интегральную сумму иногда называют *римановой*.

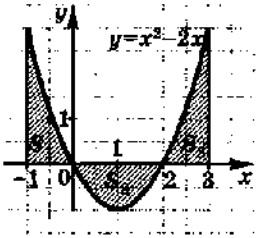


Рис. 84

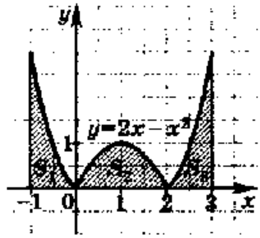


Рис. 85

Пример 1. Выразить через интегралы площадь заштрихованной на рисунке 84 фигуры.

Решение. Разрежем данную фигуру на три части, и ту часть, которая расположена под осью абсцисс, отобразим симметрично этой оси в верхнюю полуплоскость (рис. 85). Искомая площадь равна сумме площадей трех криволинейных трапеций:

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Каждая из площадей криволинейных трапеций записывается как интеграл:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\, dx, \quad S_2 = \int_{0}^{2} (2x - x^2)\, dx, \quad S_3 = \int_{2}^{3} (x^2 - 2x)\, dx.$$

Ответ: $S = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\, dx + \int_{0}^{2} (2x - x^2)\, dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 2x)\, dx.$

Примечание. Фигура на рисунке 85 сама является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = |x^2 - 2x|$, и ее площадь равна интегралу:

$$S = \int_{-1}^{3} |x^2 - 2x|\, dx.$$

Представление искомой величины в виде суммы с последующим переходом к пределу встречается довольно часто. Рассмотрим еще одну задачу, приводящую к интегралу.

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции (рис. 86) вокруг оси абсцисс[1].

[1] В 1612 г., готовясь к своей свадьбе, И. Кеплер заинтересовался вопросом определения вместимости винных бочек и уже через три года вышла его работа «Новая стереометрия винных бочек», в которой задача вычисления объемов тел вращения была решена.

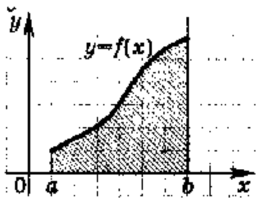


Рис. 86

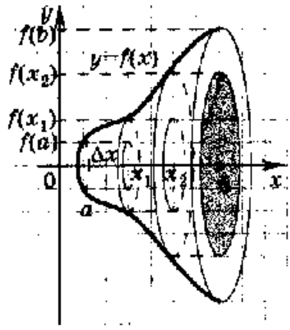


Рис. 87

Р е ш е н и е. Как и в задаче с площадью криволинейной трапеции, «нарежем» данное тело вращения слоями толщиной Δx и заменим каждый слой цилиндром, обрезая неровности по краям (рис. 87).

Используя формулу объема цилиндра: $V = \pi R^2 h$, составим интегральную сумму и выразим объем данного тела вращения как ее предел:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} (\pi f^2(a)\,\Delta x + \pi f^2(x_1)\,\Delta x + \pi f^2(x_2)\,\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_{n-1})\,\Delta x) = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

$$V_{\text{тела вращения}} = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

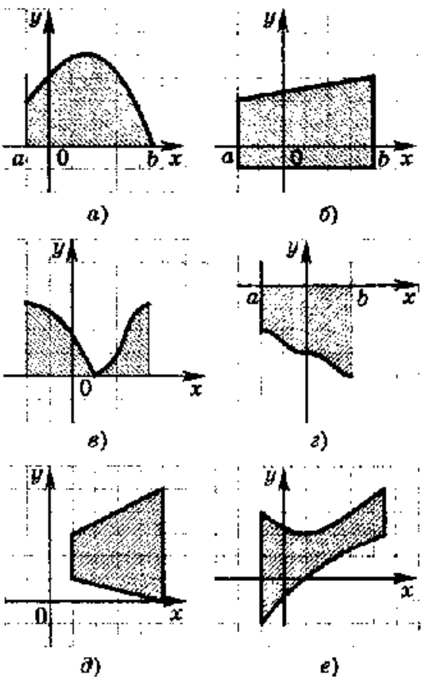


Рис. 88

Упражнения

239. Какие из фигур на рисунке 88 являются криволинейными трапециями?

240°. В каких случаях полученная в результате преобразования фигура по-прежнему будет криволинейной трапецией, если криволинейная трапеция:

1) сдвигается:

а) влево; б) вправо; в) вниз; г) вверх;

2) растягивается в k раз:

а) от оси абсцисс; б) от оси ординат?

Изменится ли ее площадь?

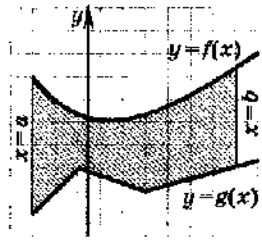


Рис. 89

241$^{\bullet}$. Выразите площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 89) с помощью интеграла. Как вы думаете, почему на рисунке не изображена ось абсцисс?

242. Запишите площадь заштрихованных фигур с помощью интегралов (рис. 90, *а—г*).

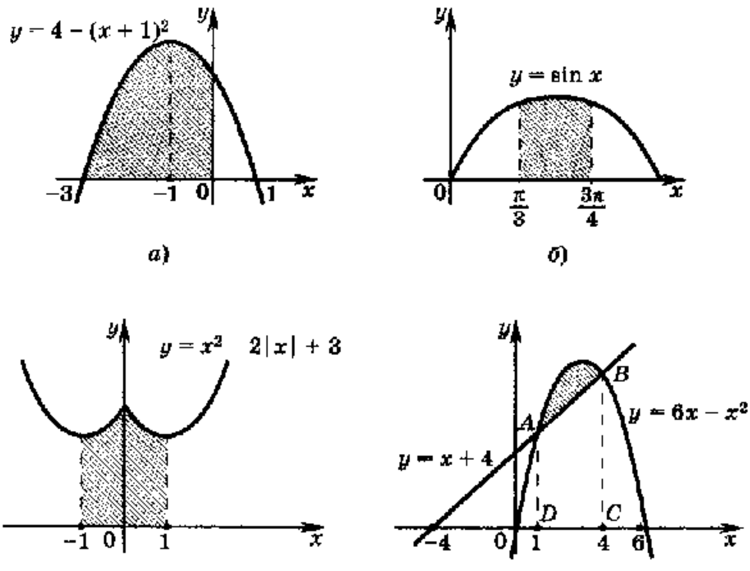


Рис. 90

243. Изобразите фигуру, площадь которой равна:

а) $\int\limits_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$;

в) $\int\limits_{1}^{4}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$;

г) $\int\limits_{1}^{e}\ln x\,dx$.

244. Выразите площади фигур, изображенных на рисунке 91 (*а*—*г*) через интегралы.

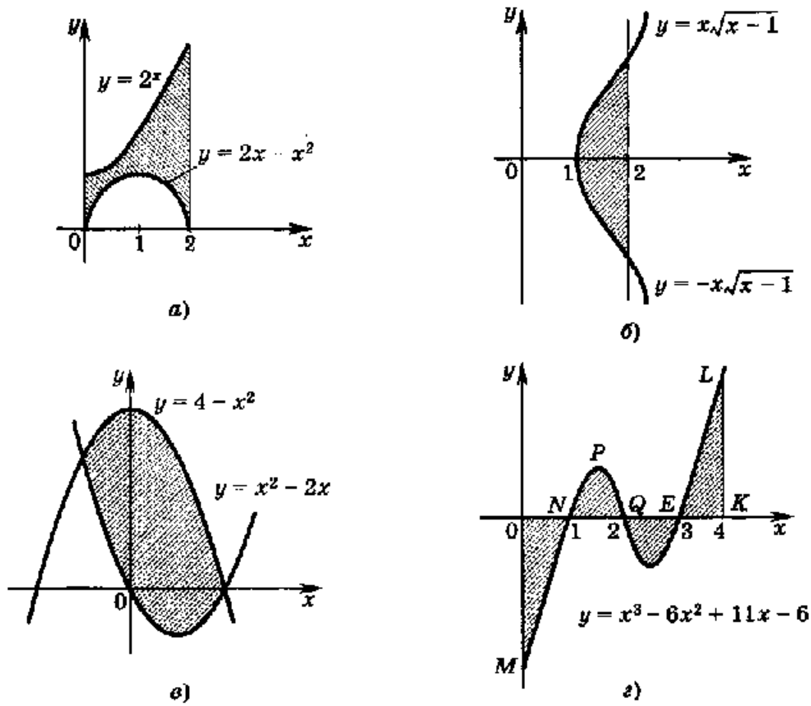


Рис. 91

245°. Запишите формулы для вычисления площадей фигур на рисунке 92 (*а*—*в*) с помощью интегралов.

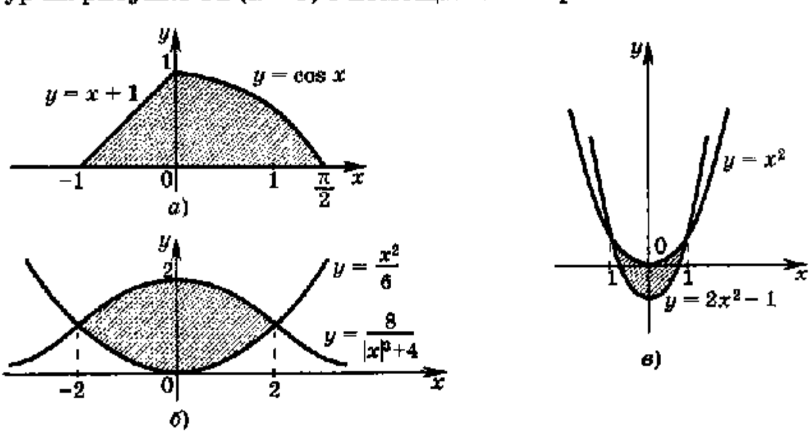


Рис. 92

246. Изобразите фигуру, ограниченную линиями:

а) $y = x^2 - 1$, $y = 0$;

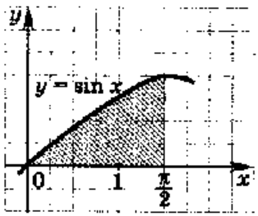
б) $y = 1 - x^2$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$;

в) $y = 2x^2 - 4x + 1$, $y = 6 - 2x - x^2$;

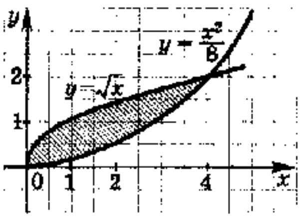
г) $y = 2^x$, $y = \sqrt{18 - x}$, $x = -1$

и выразите ее площадь с помощью интегралов.

247. 1) Выразите через интегралы объемы тел, образованных вращением заштрихованных на рисунке 93 фигур вокруг оси абсцисс.



а)



б)

Рис. 93

2)● Найдите объемы тел, образованных вращением этих фигур вокруг оси ординат.

248*. Составьте интегральную сумму и выразите как интеграл давление воды на плотину, имеющую форму треугольника с основанием a м и высотой h м (рис. 94).

249*. Составьте интегральную сумму и выразите как интеграл объем пирамиды с площадью основания S и высотой H (рис. 95).

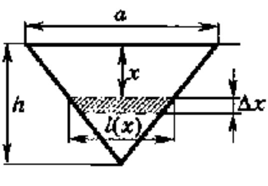


Рис. 94

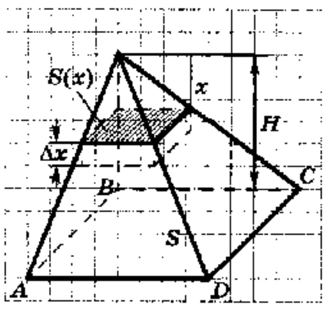


Рис. 95

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое интегральная сумма, интеграл, границы интегрирования?

2. Какие условия должны выполняться, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, можно было выразить интегралом $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$?

3. Выразите с помощью интегралов объемы конусов, которые получаются в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 сначала вокруг меньшего, а затем вокруг большего катета.

13. Первообразная

Будем теперь рассматривать площадь фигуры под кривой $y = f(x)$ как функцию $S(x)$. Действительно, каждому значению x из промежутка $(a; b]$ (рис. 96) соответствует площадь криволинейной трапеции $AXYD$. Приращению Δx (рис. 97) соответствует приращение ΔS — площадь заштрихованной криволинейной трапеции, которую и здесь при стремлении Δx к нулю можно заменить площадью прямоугольника $f(x)\,\Delta x$.

Приращение функции при этом превратится в ее дифференциал: $dS = f(x)\,dx$. Значит, $S'(x) = f(x)$.

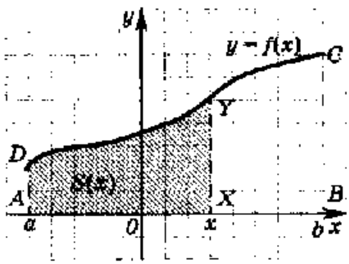


Рис. 96

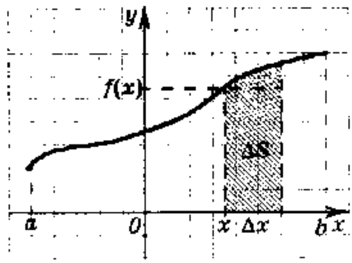


Рис. 97

Оказалось, что введенная нами функция $S(x)$ имеет производную, равную функции $f(x)$, чей график ограничивает криволинейную трапецию сверху.

В математике для таких функций используют специальный термин.

Функция $F(x)$ называется* первообра́зной *для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Для некоторых функций первообразную легко «угадать», так, например, любая постоянная функция является первообразной для функции $f(x) = 0$. Можно доказать, что других первообразных у этой функции нет.

▼ Для доказательства достаточно заметить, что если дифференцируемая функция *не* является постоянной, то на промежутке, в концах которого ее значения различны, есть точка, где по теореме Лагранжа производная отлична от нуля. Следовательно, эта функция не является первообразной функции $f(x) = 0$. △

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ первообразные для непрерывной функции $f(x)$ на промежутке L. То есть на этом промежутке $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Разность функций $F(x)$ и $G(x)$ является первообразной для разности их производных, которая равна нулю: $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Значит, разность функций $F(x) - G(x)$ постоянна, а это позволяет сделать вывод о том, что

любые две первообразные одной функции отличаются на константу:

$F(x) = G(x) + C$, где C — константа.

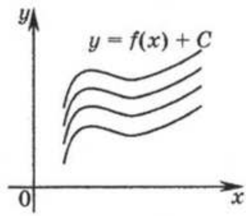


Рис. 98

Графики первообразных получаются один из другого сдвигом вдоль оси ординат (рис. 98).

Пример 1. Найти первообразную функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, график которой проходит через точку $M(-1; 4)$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна при всех x, кроме $x = 0$, поэтому она имеет первообразную либо на промежутке $(-\infty; 0)$, либо на промежутке $(0; +\infty)$. Однако отрицательность абсциссы точки M говорит о том, что речь идет о промежутке $(-\infty; 0)$.

Поскольку $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = (-1) \cdot x^{-1-1} = (x^{-1})'$, то $G(x) = x^{-1}$ является одной из первообразных функции f.

Пусть $F(x)$ — искомая первообразная, тогда, во-первых, $F(x) = x^{-1} + C$, и, во-вторых, из условия принадлежности точки M ее графику: $F(-1) = 4$. Имеем: $(-1)^{-1} + C = 4$, $C = 5$ и, наконец, $F(x) = x^{-1} + 5$.

Ответ: $F(x) = x^{-1} + 5$, где $x < 0$.

П р и м е ч а н и е. Указание в ответе на отрицательность значений аргумента найденной функции обязательно. Его отсутствие привело бы к рассмотрению функции $F(x)$ на естественной области определения $x \neq 0$, которая не может служить областью определения первообразной, так как не является промежутком.

Вернемся к ситуации, изображенной на рисунке 96. При $x = a$ криволинейная трапеция $AXYD$ *вырождается* в отрезок, и ее площадь обращается в нуль: $S(a) = 0$. При $x = b$ значение функции $S(x)$ дает площадь криволинейной трапеции $ABCD$. Однако для вычисления площади криволинейной трапеции можно использовать и любую другую первообразную функции $f(x)$:

$$S_{ABCD} = F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) =$$

$$= S(b) - S(a) = S(b).$$

Таким образом, площадь криволинейной трапеции S_{ABCD}, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, равна приращению *любой* первообразной этой функции, соответствующему изменению аргумента от $x = a$ до $x = b$:

$$S_{ABCD} = F(b) - F(a).$$

П р и м е р 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = \pi$.

Р е ш е н и е. Данная фигура (рис. 99) — криволинейная трапеция.

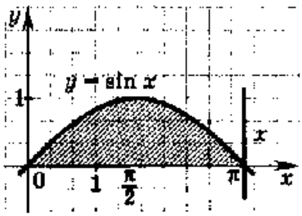


Рис. 99

Для вычисления ее площади найдем какую-нибудь первообразную функции $f(x) = \sin x$. И в этом случае ее нетрудно угадать, умножив известную формулу $(\cos x)' = -\sin x$ на -1: $-(\cos x)' = (-\cos x)' = \sin x$. Значит, $F(x) = -\cos x$ — первообразная для функции $f(x) = \sin x$. Теперь можно вычислить искомую площадь как приращение первообразной:

$$S = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

О т в е т: 2.

П р и м е ч а н и е. Иногда для сокращения записей удобно использовать символ подстановки: $\Big|_a^b$ (читается: *подстановка от a до b*): $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

В предыдущем пункте мы получили выражение для площади криволинейной трапеции в виде интеграла, в этом пункте та же площадь оказалась равной приращению первообразной. Объединение этих результатов приводит нас к важной формуле, полученной Ньютоном и Лейбницем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Интеграл есть приращение первообразной.

Формулу Ньютона—Лейбница[1] используют и в случаях, когда $f(x)$ принимает отрицательные значения, и даже когда $a > b$. Для этого, правда, нужно уметь находить первообразные. Нахождение первообразных называют *интегрированием*. Мы рассмотрим наиболее простые случаи интегрирования, непосредственно вытекающие из формул и правил дифференцирования.

В примерах 1 и 2 вы уже видели, как из известных формул производных получают первообразные. Так же получены все первообразные, которые называют табличными.

Доказать, что одна функция является первообразной по отношению к другой, проще всего с помощью дифференцирования предполагаемой первообразной.

Пример 3. Доказать, что $F(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ — первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$.

Доказательство. Вынося числовой множитель за знак производной и используя формулы производной арктангенса и сложной функции, получаем:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2+x^2} = f(x).$$

---

[1] Исаак Ньютон (1643—1727) — великий английский физик и математик, создавший теоретические основы механики, астрономии и математики. В 1665 г. Ньютон окончил Кембриджский университет. Разразившаяся в Англии эпидемия чумы заставила его в течение двух лет после университета жить на ферме. Эти «чумные» каникулы оказались для Ньютона очень плодотворными — за эти два года он сделал почти все свои основные открытия.

Мы уже писали о Готфриде Вильгельме Лейбнице (1646—1716) как отце математического анализа, однако кроме математики он занимался физикой, инженерным делом (изобрел арифмометр), языкознанием, историей. Именно Лейбниц ввел в употребление знак умножения «·».

Для любого x из промежутка $(-\infty; +\infty)$ $F'(x) = f(x)$, значит, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

Вместе с первообразными, приведенными в таблице, будем использовать три правила интегрирования, в справедливости которых легко убедиться с помощью дифференцирования.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

1. Функция $F(x) \pm G(x)$ — первообразная функции $f(x) \pm g(x)$.

2. Функция $G(x) = kF(x)$ — первообразная функции $g(x) = kf(x)$.

3. Функция $G(x) = \frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная функции $g(x) = f(kx + b)$.

Таблица первообразных

№ п/п	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$ функции $f(x)$
1	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x$ или $\ln(-x)$
3	e^x	e^x
4	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
5	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x$ или $\log_a(-x)$
6	$\sin x$	$-\cos x$
7	$\cos x$	$\sin x$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
10	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ или $-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$
11	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ или $-\arccos\frac{x}{a}$

Примечание. Область определения первообразной — промежуток. Об этом надо помнить, обращаясь к 1, 2, 5, 8 и 9 строкам таблицы.

П р и м е р 4. Найти все первообразные функции

$$f(x) = 3\cos x + \sqrt{3x-2}.$$

Р е ш е н и е. Применяя правила и таблицу первообразных, получим:

$$F(x) = 3\sin x + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\frac{3}{2}} + C = 3\sin x + \frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + C,$$

где C — любое число.

Интегрирование — процесс обратный дифференцированию. Каждая строчка в таблице первообразных получена из соответствующей формулы производной, однако нахождение первообразных во многих случаях оказывается значительно сложнее, чем дифференцирование. Так, например, нет правила, позволяющего выражать первообразную частного через первообразные числителя и знаменателя, а правило интегрирования сложной функции ограничено случаем, когда внутренняя функция является линейной: $y = kx + b$. Заметим, что первообразная элементарной функции не всегда является элементарной, так, например, первообразную функции $y = \frac{1}{\ln x}$ нельзя записать как комбинацию конечного числа основных элементарных функций.

Упражнения

250. Проверьте, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$:

а) $F(x) = -\cos 2x - 5$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$;

б) $F(x) = x(\ln x - 1)$, $f(x) = \ln x$;

в) $F(x) = 2\operatorname{tg} 3x + 4x^2 + 2$, $f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 8x$;

г) $F(x) = \sqrt[5]{x^4} - e^{2x} - x + 7$, $f(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} - 2e^{2x} - 1$;

д) $F(x) = 3^{2x} - \sin 4x + \frac{7}{x} - 1$, $f(x) = 2\cdot 3^{2x}\ln 3 - 4\cos 4x - \frac{7}{x^2}$;

е) $F(x) = \log_5 2x + \sqrt{x} - 2$, $f(x) = \frac{2}{x\ln 5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

251. Для какой из функций $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ функция $F(x)$ является первообразной:

а) $p(x) = 6(x^2 - 1)$, $g(x) = 6x^2 - 6x + 1$, $q(x) = 6x(x - 1)$, $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

б) $p(x) = -2x + 3x^2$, $g(x) = -3x\left(\frac{4}{3} + x\right)$, $q(x) = 3x^2 - 4x$, $F(x) = 3 - 2x^2 + x^3$;

в) $p(x) = -4\sin x \cos x$, $g(x) = 4\sin x \cos x$, $q(x) = -\sin 2x$, $F(x) = -\cos 2x$?

252*. Найдите функцию $f(x)$, первообразной которой является функция $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = 0, \\ x + x^2 \sin \frac{5}{x} \text{ при } x \neq 0 \end{cases}$ Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

253•. По графику первообразной функции $F(x)$ (рис. 100, *а—г*) постройте график функции $f(x)$.

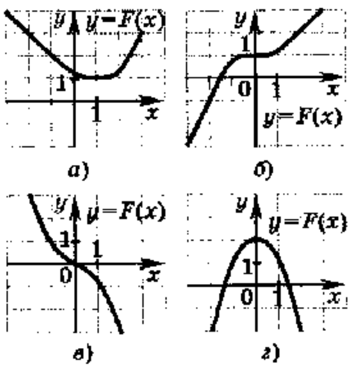


Рис. 100

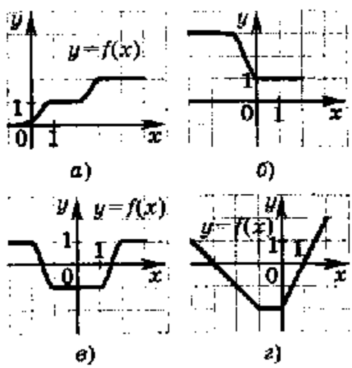


Рис. 101

254•. По графику функции $f(x)$ (рис. 101, *а—г*) постройте график ее первообразной $F(x)$, который проходит через начало координат.

255. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через точку A:

а) $f(x) = \sin 2x$, $A\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $A(4; 6)$;

в) $f(x) = e^{-3x}$, $A\left(\ln 2; \frac{5}{24}\right)$;

г) $f(x) = \sin x - \cos x$, $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

д)• $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$, $A(-1; 4)$;

е)• $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$, $A\left(\frac{\pi}{12}; -1\right)$.

256. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^1 (x+2)^2\,dx$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$;

в) $\int\limits_3^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

г) $\int\limits_0^{\pi} 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

д) $\int\limits_1^2 (x^2+x^{-2})\,dx$;

е) $\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \sin(1{,}5\pi+0{,}5x)\,dx$;

ж) $\int\limits_{\pi}^{\pi/4} (\sin 2x-\cos 2x)^2\,dx$.

257. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями:

а) $y=3-2x-x^2$, $x=-3$, $x=0$;

б) $y=\sin x$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{3\pi}{4}$;

в) $y=\frac{1}{x^2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$;

г) $y=\frac{x^2}{1+x}$, $x=2$, $x=1$;

д)$^{\bullet}$ $y=x^2-4|x|+5$, $x=-2$, $x=4$;

е)$^{\bullet}$ $y=1+\sqrt{|x|}$, $x=-1$, $x=4$.

258°. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$ и $g(x)$:

а) $f(x)=6x-x^2$, $g(x)=x+4$;

б) $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{x}$;

в) $f(x)=\sin x$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$, $g(x)=\frac{2x}{\pi}$;

г) $f(x)=|\sin x|$, $g(x)=0$, где $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

259$^{\bullet}$. Напишите выражение для первообразных функции $f(x)=|x|$.

260$^{\bullet}$. Каждая из первообразных, о которых идет речь в этом задании, определена на множестве всех действительных чисел. Верно ли, что:

а) любая первообразная нечетной непрерывной функции является четной функцией;

б) любая первообразная четной непрерывной функции является нечетной функцией;

в) у любой четной непрерывной функции существует нечетная первообразная?

261. Найдите все первообразные функции:

а) $f(x) = 3x^2 + x^3$; в)$^\circ$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

б)$^\circ$ $f(x) = x^{-2} + \cos 2x$; г)$^\bullet$ $f(x) = \cos^2 x$.

262. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x)$, принимающую отрицательное значение в точке $x = m$:

а) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2$, $m = 1$;

б)$^\circ$ $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{x}{2} - 1$, $m = -4$.

263*. Сравните с примером 1 этого пункта и решите задачу: найти все функции $f(x)$, имеющие производную $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, графики которых проходят через точку $M(-1; 4)$.

264$^\bullet$. Найдите все функции $f(x)$, графики которых проходят через точку B, если:

а) $f'(x) = 4x^2 - 9x^{-2}$, $B(3; -2)$;

б) $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + \dfrac{1}{x}$, $B(2; 1)$.

265°. Найдите первообразную для функции $f(x)$, график которой касается прямой $g(x)$:

а) $f(x) = x + 3$, $g(x) = 0$;

б) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x + 1$.

266$^\bullet$. Прямая $y = ax + b$ касается каждой из парабол $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x) = 5 - (x+1)^2$ и $g(x) = 8 - (x-2)^2$;

2) $f(x) = x^2 + 5x + 7$ и $g(x) = x^2 - x - 5$.

Найдите:

а) значения a и b;

б) координаты точек касания;

в) площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой.

267°. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой:

а) $y = x^2 + 1$ и касательными к ней в точках с абсциссами 0 и 2;

б)$^\bullet$ $y = x^2 - 4x$ и касательными к ней, проходящими через точку $A\left(\frac{5}{2}; -6\right)$.

268°. Найдите площадь каждой из фигур, на которые прямая $y = x + 3$ делит фигуру, ограниченную линиями $y = 2x^2$ и $y = 8$.

269$^\bullet$. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, будет наименьшей?

270$^\bullet$. Найдите наименьшее и наибольшее значения интеграла:

а) $\int\limits_0^a \sin \frac{x}{2}\, dx,\ a > 0;$ б) $\int\limits_0^a x(x-2)\, dx,\ a > 0.$

271°. Найдите пары чисел a и b, при которых функция $f(x) = a \sin \pi x + b$ удовлетворяет условиям:

$f'(2) = 3,\ \int\limits_0^2 f(x)\, dx = 4.$

272. Материальная точка движется по координатной прямой со скоростью $v(t) = \sin 2t \cos 2t$. Найдите уравнение движения точки, если при $t = \frac{\pi}{4}$ ее расстояние от начала координат равно 2.

273$^\bullet$. Два тела начали движение одновременно из одной точки: а) в одном направлении; б) в противоположных направлениях.

Первое тело движется со скоростью $v_1(t) = 6t^2 + 2t$ (м/с), второе — со скоростью $v_2(t) = 4t + 5$ (м/с). На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

274. Найдите импульс тела массой 2 кг, движущегося с ускорением $a = t^2 - 2t + 2$, через 3 с после начала движения, если его начальная скорость равна 1 м/с.

275. Используя формулу для нахождения среднего значения μ функции $f(x)$, $\mu = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx$, найдите:

а) среднюю теплоемкость бензина для температур, лежащих в интервале от $t_1 = 116$ °С до $t_2 = 218$ °С, если при постоянном давлении теплоемкость бензина в зависимости от температуры t выражается формулой $C(t) = 0{,}2237 + 0{,}00102t$;

б) среднее значение силы переменного тока, изменяющегося по закону $I(t) = k \sin t$, где k — постоянная, $t \in [0; \pi]$.

276. Найдите объем тел, образованных вращением вокруг оси x фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$;

б) $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 4$;

в)○ $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$;

г)○ $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$;

д)● $y^2 = x$, $y = x^2$;

е)● $y^2 = 8x$, $y = x^2$.

277●. Выведите формулу объема прямого кругового конуса с радиусом основания R и высотой H.

278●. Докажите, что объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

279○. Найдите наибольший объем, который может иметь коническая воронка с образующей, равной l.

280●. Найдите размеры прямого кругового конуса наибольшего объема, который вписан в шар радиуса R.

281●. Какой наибольший объем может быть у тела, образованного вращением равнобедренного треугольника с периметром $2p$ вокруг своего основания?

282○. Найдите отношение высоты конуса к радиусу его основания, зная, что у него самый большой объем из возможных при его площади боковой поверхности.

283. Скорость поезда, идущего под уклон, изменялась по закону $v(t) = 15 + 0{,}2t$ м/с. Вычислите длину уклона, зная, что поезд прошел его за 20 с.

284*. Найдите давление воды на плотину, имеющую форму треугольника, обращенного вершиной вниз, если основание треугольника 18 м, а его высота 10 м.

285*. Пирамида Хеопса представляет собой правильную четырехугольную пирамиду высотой 147 м, в основании которой лежит квадрат со стороной 232 м. Найдите работу (в джоулях), затраченную при строительстве пирамиды, если плотность составляющих ее блоков равна a кг/м^3. (Наличием в пирамиде Хеопса внутренних помещений пренебречь)

Контрольные вопросы и задания

1. Какую функцию называют первообразной для функции $y = f(x)$? Чем может являться область определения первообразной?

2. Как убедиться в том, что функция $F(x)$ — первообразная для функции f? Является ли функция $F(x) = \ln |x|$ первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$?

3. Найдите по формуле Ньютона—Лейбница интеграл $\int_{1}^{-1} (1 - x^3)\, dx$.

ГЛАВА

5

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Свое умение решать уравнения, неравенства и системы вы неоднократно демонстрировали в предшествующем курсе. В учебнике для 10 класса подробно рассматривались иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения. В этой главе будет немного повторения, но главное — это знакомство с некоторыми специальными приемами, которые помогают при решении более трудных задач.

14. Уравнения

Вам знакомы линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения. Для каждого из перечисленных типов вы знаете либо алгоритм решения, либо стандартные приемы, связанные с использованием тех или иных формул и правил. Так, корни квадратного уравнения всегда можно найти по формуле корней, а иррациональное уравнение обычно возводят в степень, чтобы избавиться от радикалов.

К решению уравнений часто сводится и решение неравенств. Особенно ярко это проявляется при решении неравенств методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $(\operatorname{tg} 3x - 1)(2\sin 2x - 1) > 0$.

Решение. Найдем границы интервалов знакопостоянства — точки, в которых выражение $(\operatorname{tg} 3x - 1)(2\sin 2x - 1)$ обращается в нуль: при $\operatorname{tg} 3x = 1$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$ или теряет смысл: при $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

$$\operatorname{tg} 3x = 1,\ 3x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3};$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2},\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k;$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Заметив, что число π является периодом функции $y = (\operatorname{tg} 3x - 1)(2\sin 2x - 1)$, выпишем те из границ, которые попадают в промежуток $[0; \pi)$.

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}:\ \frac{\pi}{12},\ \ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12},\ \ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4};$$

$$\frac{\pi}{12} + \pi k : \frac{\pi}{12};$$

$$\frac{5\pi}{12} + \pi k : \frac{5\pi}{12};$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k:\ \frac{\pi}{6},\ \ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

Отметим их на координатной прямой.

При переходе через точки $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$ знак изменяют сразу обе скобки, и поэтому их произведение знак сохраняет. При переходе через точку $\frac{3\pi}{4}$ знак меняет только первая скобка, а вместе с ней и произведение. При переходе через точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{6}$ $\operatorname{tg} 3x$ меняет знак своей бесконечности, а значит, меняет знак и разность $\operatorname{tg} 3x - 1$. Найдем знак произведения, например при $x = 0$, и проведем линию знаков (рис. 102).

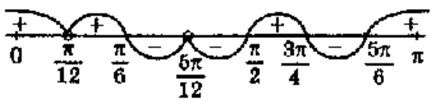


Рис. 102

С учетом упомянутой выше периодичности запишем ответ:

$$\left[\pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \pi + \pi k\right) (k \in \mathbb{Z}).$$

Примечание. Объединение промежутков $\left[\pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k\right) \cup \cup \left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \pi + \pi k\right)$ можно «склеить»: $\left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi(k - 1)\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ или $\left(\pi k - \frac{\pi}{6}; \pi k + \frac{\pi}{12}\right) (k \in \mathbb{Z})$.

При решении многих уравнений приходится проводить довольно сложные преобразования и вычисления. Однако трудоемкость решения часто удается существенно снизить с помощью универсального для всех типов[1] уравнений приема — введения новой переменной. Эта новая переменная заменяет собой какую-то, как правило, повторяющуюся часть исходного уравнения. Труднее всего при замене переменной бывает увидеть выражение, которое собственно и нужно заменить.

Пример 2. Решить уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=15.$$

Решение. После раскрытия скобок получится уравнение четвертой степени и придется либо искать его целые корни, либо пытаться найти какое-то разложение на множители — перспективы не очень радостные. Однако у этого уравнения есть важная особенность: если попарно перемножить внешние скобки произведения и внутренние его скобки, то получится уравнение, в котором кандидат на роль новой переменной очевиден:

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=15.$$

Обозначив выражение x^2-5x+4 буквой y, получаем квадратное уравнение $y(y+2)=15$. Найдя его корни $y_1=-5$ и $y_2=3$, возвращаемся к исходной переменной x:

$$x^2-5x+4=-5 \quad \text{или} \quad x^2-5x+4=3,$$

$$x^2-5x+9=0 \quad \text{или} \quad x^2-5x+1=0,\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Примечание. Можно было обратить внимание на другую особенность данного уравнения, а именно на то, что нули произведения, точки 1, 2, 3 и 4 симметричны относительно точки 2,5. Обозначив буквой z разность $x-2{,}5$, получим:

$$(z+1{,}5)(z+0{,}5)(z-0{,}5)(z-1{,}5)=15,\ (z^2-2{,}25)(z^2-0{,}25)=15.$$

Раскрыв скобки, придем к биквадратному уравнению, однако проще сделать еще одну замену: $y=z^2-2{,}25$, и получить уже знакомое уравнение $y(y+2)=15$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x.$$

Решение. И в этом случае стандартный подход, связанный с освобождением от радикалов, не внушает оптимизма.

[1] Универсальность понимается в смысле применимости к любому типу уравнения, но не к любому уравнению.

Однако практически с первого взгляда в левой части уравнения можно заметить сумму и удвоенное произведение радикалов $\sqrt{x}$ и $\sqrt{x+7}$. Это наводит на мысль о квадрате суммы этих радикалов: $(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2 = 2x+7+2\sqrt{x^2+7x}$ — вот и для $2x$ из правой части исходного уравнения нашлось место:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2x+7+2\sqrt{x^2+7x} = 35+7,$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2 = 42.$$

Теперь стала видна требуемая замена: $y = \sqrt{x}+\sqrt{x+7}$.

После решения квадратного уравнения $y^2+y-42=0$, конечно, придется решить еще иррациональное уравнение относительно x, однако трудностей на этом пути не предвидится.

Как видно из рассмотренных примеров, замена переменной может потребовать некоторой наблюдательности.

П р и м е р 4. Решить уравнение $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$.

Р е ш е н и е. Особенностью этого целого рационального уравнения является равенство коэффициентов его левой части, равноудаленных от ее концов. Такие уравнения называют ***возвратными***.

Поскольку 0 не является корнем данного уравнения, делением на x^2 получаем равносильное уравнение:

$$2x^2-3x-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0, \quad 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Введем новую переменную $y=x+\frac{1}{x}$, тогда $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ и $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Получаем квадратное уравнение

$$2(y^2-2)-3y-1=0,\ 2y^2-3y-5=0,\ y_1=-1,\ y_2=2{,}5.$$

Остается вернуться к переменной x и найти корни исходного уравнения.

П р и м е ч а н и е. Выполняя замену переменной, полезно подумать о значениях, которые она может (или не может) принимать. Так, поскольку $|y| = \left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2$, можно не рассматривать корень $y_1=-1$.

Не менее универсален, чем замена переменной, самый древний способ решения уравнений — подбор корней. Подбор целых корней среди делителей свободного члена — основной способ решения целых уравнений высоких степеней. Однако мало подобрать корни — нужно ведь еще убедиться, что других корней нет. Здесь на помощь часто приходят свойства монотонности функций.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{19-x} - \sqrt{x+6} = \log_3(8x+3) - 2.$$

Решение. Попробуем подобрать x так, чтобы извлекались корни в левой части уравнения: при $x = 3$ имеем $\sqrt{19-x} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{x+6} = \sqrt{9} = 3$. При этом значении x и правая, и левая часть равенства принимают одно и то же значение, следовательно, число 3 — корень данного уравнения. Поскольку левая часть уравнения задает убывающую, а правая — возрастающую функции, других корней данное уравнение не имеет.

Ответ: 3.

Рассмотрим еще одну идею подбора корня, связанную со свойствами функций.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin \pi x + \cos \pi x = 2^{\log_3 \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{49}{16}}}.$$

Решение. Наибольшее значение, которое может принять сумма синуса и косинуса одного и того же угла, равно $\sqrt{2}$, так как $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \leqslant \sqrt{2}$.

Правая часть равенства в силу возрастания функций $u = \sqrt{v}$, $t = \log_3 u$ и $y = 2^t$ принимает свое наименьшее значение при $x = \frac{1}{4}$ $\Big($абсцисса вершины параболы $v = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{49}{16}$, целиком расположенной в верхней полуплоскости ввиду отрицательности дискриминанта соответствующего квадратного трехчлена$\Big)$. Найдем это значение:

$$2^{\log_3 \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{49}{16}}} = 2^{\log_3 \sqrt{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Оказалось, что наименьшее значение правой части уравнения совпадает с наибольшим значением его левой части. Остается проверить, происходит ли это при одном и том же значении x. Найдем значение левой части уравнения при $x = \frac{1}{4}$: $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Значит, $\frac{1}{4}$ — корень данного уравнения.

Поскольку при всех других значениях x значения правой части уравнения больше, чем значения его левой части, то других корней нет.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Упражнения

286. Решите тригонометрические неравенства:

а) $\cos(-0{,}5x) < \sin\pi$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$;

в) $\sin x\cos x \geqslant -\frac{1}{4}$;

г) $4\sin(x - 2\pi)\cdot\cos(-x - \pi) \leqslant 1$;

д)$^{\circ}$ $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) \leqslant \sqrt{3}$;

е)$^{\circ}$ $\sin^2 x > \frac{1}{4}$;

ж)$^{\circ}$ $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 1$;

з)$^{\circ}$ $\cos x(\operatorname{tg} 2x - 1) \leqslant 0$;

и)$^{\bullet}$ $\cos^2 x - \cos x < 0$;

к)$^{\bullet}$ $2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$;

л)$^{\bullet}$ $(\operatorname{ctg} 3x - 1)(2\cos 2x - 1) > 0$;

м)$^{\bullet}$ $(\operatorname{tg} 2x - 1)(2\sin 3x - 1) > 0$.

287°. Какую особенность уравнения можно использовать в решении? Решите уравнение:

а) $(x - 3)(x - 2)x(x + 1) = 10$;

б) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$;

в) $(x^2 - 2x + 3)(2x^2 - 3x + 6) = 6x^2$;

г) $(x - 6)(2x - 1)(x + 2)(2x + 3) = 21x^2$;

д)$^{\bullet}$ $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$;

е) $35\cdot 3^{x^2} - 35\cdot 5^{2x} - x\cdot 3^{x^2} + x\cdot 5^{2x} = 0$;

ж) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;

з) $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = 0$.

288. Введите, если нужно, новую переменную и решите уравнение:

а) $4^x - 10\cdot 2^{x-1} = 24$;

б) $3\cos 2x + \sin^2 x + \sin 2x = 1$;

в)$^{\circ}$ $2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} + 2 = 0$;

г) $9\cdot 4^x - 13\cdot 6^x + 4\cdot 9^x = 0$;

д) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$;

е)$^{\bullet}$ $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$;

ж)$^{\bullet}$ $\cos 2^x - 2\operatorname{tg}^2 2^{x-1} + 2 = 0$;

з)$^\circ$ $\sqrt{8\cdot 3^{x+2}-23}=2-3^{x+1}$;

и)$^\bullet$ $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$;

к)$^\bullet$ $x^2+2x-3=3|x+1|$;

л)$^\bullet$ $x^2-4x-4=2|x-2|$.

289°. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2+x}{1-x}}>\sqrt{\frac{\pi}{4}}$;

б) $5^{2x+1}>5^x+4$;

в) $2\log_5 x-\log_x 125<1$;

г) $\log_{100} x^2+\lg^2 x<2$.

290$^\bullet$. Решите уравнение, подбирая корень:

а) $2x^3-3x^2-32x-15=0$;

б) $3x^4-7x^3+6x^2+23x-6=0$;

в) $2x^3=-18-x$;

г) $x^5+4x=-40$;

д) $2^{x+1}+x=-\frac{3}{2}$;

е) $2^x=-\frac{1}{2}-x$;

ж) $3^x+4^x=5^x$;

з) $8-2x=\sqrt{x+1}$;

и) $\log_2(2^x-7)=3-x$;

к) $\log_6(6^{-x}+5)=1+x$.

291. Решите уравнение, используя ограниченность функций:

а) $\sin 5x-2\cos 2x=3$;

б) $\sin x=x^2+x+1$;

в)$^\bullet$ $2\cos\frac{x}{3}=2^x+2^{-x}$;

г) $\sin\frac{\pi x}{2}=x^2-2x+2$;

д)* $3\sin x+4\cos 3x\cos x+2\sin 5x=7$;

е)* $4\cos^2 x-4\cos^2 3x\cos x+\cos^2 3x=0$.

292. Решите неравенство, используя ограниченность функций:

а) $\cos x<x^2+1$;

б) $\cos x\leqslant 1+|x|$;

в) $\cos x\geqslant 1+2^x$;

г) $\cos x<1+\frac{1}{2-\sin^2 x}$;

д)$^\bullet$ $\arcsin\frac{2}{x}+\sqrt{x-1}>1$;

е)$^\bullet$ $\sqrt{\lg\sin x}<x-12{,}5\pi$.

293. Найдите идею решения уравнения и постарайтесь ее реализовать:

а) $(2x^2+3x)^2-7(2x^2+3x)+10=0$;

б) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0$;

в) $9^x + 12^x - 2 \cdot 16^x = 0$;

г) $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x} - 1} + 2 = 0$;

д)$^\bullet$ $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 8$;

е)$^\bullet$ $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$;

ж) $2 \sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

з)$^\circ$ $5 \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x$.

294. Составьте план решения уравнения и постарайтесь его выполнить:

а) $|\sin x|(2x + 1) = |x + 0{,}5|$;

б) $9^{|x-2| \sin x} = 3^{x+|\sin x|}$;

в)$^\bullet$ $\log_7(7^{-x} + 6) = 1 + x$;

г)$^\circ$ $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{\lg x + 1}$;

д)* $2^{\frac{3x-1}{2x+1}} - 1 = 2^{\frac{2-x}{2x+1}}$;

е)$^\circ$ $4^{3x^2 + x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2 + \frac{x}{3}}$;

ж) $\log_x(2x) = \sqrt{\log_x(2x^3)}$;

з)$^\circ$ $\log_2 x \cdot \log_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 1$.

295$^\bullet$. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1$;

б) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 6$;

г) $\log_2(2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5$;

д) $\log_5(8x - x^2 + 9) = x^2 - 8x + 18$;

е) $\log_3((x - 15)\cos x) = \log_3 \frac{x-15}{\cos x}$;

ж) $\cos 3x \cdot \cos 2x = -1$;

з) $\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} - 2 = 0$;

и) $\sin x \cdot \sin 3x = -1$;

к)* $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 0{,}3 \cdot \cos 0{,}9$;

л)* $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$;

м) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$;

н) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

296. Докажите, что уравнение $\log_2(2 - x)\log_x 2 = 2$ не имеет корней.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие два уравнения называют равносильными? В каком случае одно уравнение является следствием другого?

2. Можно ли поставить знак «$\Rightarrow$», переходя от одного уравнения к другому, вводя новую переменную?

3. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{43-6x}$.

15. Системы уравнений

Большинство уравнений, которые вам довелось решать, были уравнениями с одной переменной. В отличие от них уравнение с двумя переменными, как правило, имеет бесконечно много решений, хотя и из этого правила бывают исключения.

Пример 1. Решить уравнение $\ln^2 x + y^2 + 1 = 2y$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде:

$$\ln^2 x + (y-1)^2 = 0.$$

Оба слагаемых должны одновременно быть равны нулю, что достигается только при $x = y = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

При решении уравнения мы встретились с требованием одновременного выполнения условий $\ln^2 x = 0$ и $(y-1)^2 = 0$, т. е. с системой $\begin{cases} \ln^2 x = 0, \\ (y-1)^2 = 0. \end{cases}$

Введение новой переменной, помогавшее решать уравнения предыдущего пункта, по сути дела тоже заменяло уравнение системой. Например, замена $2^{x-1} = y$ при решении уравнения $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$ приводит к системе $\begin{cases} y = 2^x, \\ y^2 - 5y - 24 = 0. \end{cases}$

Заметим, что хотя нас по-прежнему интересуют только значения переменной x, знак равносильности при переходе от уравнения к этой системе ставить нельзя, так как ее решением является не число x, а пара $(x; y)$.

Вы знакомы с двумя основными подходами к решению систем — методами сложения и подстановки. Оба эти метода сводят решение системы уравнений с несколькими переменными к решению уравнения с одной переменной. При этом используется возможность:

1) *умножать или делить уравнение системы на отличное от нуля число*;

2) *заменять уравнение его суммой или разностью с другим уравнением этой системы;*

3) *заменять в уравнении переменную ее выражением, полученным из другого уравнения системы*[1].

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1. \end{cases}$$

Решение. Заменим одно из уравнений системы его суммой с другим ее уравнением:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x + \sin y + \cos y = 2, \\ \cos^2 x + \cos y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin y + \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1. \end{cases}$$

В первом уравнении системы осталось одна переменная. Решим его, вводя вспомогательный угол.

$$\sin y + \cos y = 1, \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ или } y + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\ (k \in \mathbf{Z}),$$

$$y = 2\pi k \text{ или } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Теперь можно найти значения $\cos y$ и подставить их во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = 2\pi k, \\ \cos^2 x + 1 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \cos^2 x + 0 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\pi k, \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \cos x = \pm 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pi n \end{cases} (k, n \in \mathbf{Z}).$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k\right), \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $k, n \in \mathbf{Z}$.

Примечание 1. Запись ответа в виде пар применяется для переменных x и y. Если переменные обозначены другими буквами, лучше либо записывать ответ в виде простейших систем, либо использовать буквы с индексами, например:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ y_1 = 2\pi k;\quad x_2 = \pi n,\ y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k, n \in \mathbf{Z}).$$

---

[1] Результатом перечисленных преобразований будет система, равносильная исходной.

П р и м е ч а н и е 2. Различные буквы n и k в записи ответа говорят о независимости их замены целыми числами — можно, например, взять $n = 0$, а $k = 3$.

П р и м е р 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2 - y^2 + 2xy = 2, \\ 3x^2y^2 - 2y^2 + 8xy = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Умножим первое уравнение на -2 и прибавим его ко второму уравнению системы: $\begin{cases} x^2y^2 - y^2 + 2xy = 2, \\ x^2y^2 + 4xy + 3 = 0. \end{cases}$

Второе уравнение полученной системы является квадратным относительно произведения xy. Решая его, находим, что $xy = -1$ или $xy = -3$.

Подставляя эти значения xy в первое уравнение системы, получаем: $\begin{cases} 1 - y^2 - 2 = 2, \\ xy = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 9 - y^2 - 6 = 2, \\ xy = -3. \end{cases}$ Первая из этих систем не имеет решений, а у второй — два решения: $(3; -1)$ и $(-3; 1)$.

О т в е т: $(3; -1)$, $(-3; 1)$.

Кроме сложения и вычитания уравнений системы, их иногда бывает удобно перемножать или делить друг на друга. При этом следует, конечно, обратить внимание на возможность обращения в нуль выражений, на которые умножаем или делим.

П р и м е р 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x - y) = 1 - y^3, \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 + y^3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В левых частях обоих уравнений можно заметить выражения, дополняющие друг друга до формул суммы и разности кубов x и y, что наводит на мысль перемножить уравнения системы. Однако сначала решим вопрос с нулями. Обе части второго уравнения обращаются в нуль при $x = 1$, $y = -1$. Эти значения не удовлетворяют первому уравнению системы, а значит, не являются ее решением. Заменим теперь первое уравнение системы произведением ее уравнений:

$$\begin{cases} (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (1 - y^3)(1 + y^3), \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 + y^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^6 - y^6 = 1 - y^6, \\ (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 + y^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ (1 + y + y^2)(1 + y) = 1 + y^3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1, \\ (1 - y + y^2)(-1 + y) = 1 + y^3. \end{cases}$$

Решая второе уравнение первой системы, получим $y = -1$ или $y = 0$, а второе уравнение второй системы корней не имеет. Пара $(1; -1)$, как уже отмечалось, не является решением системы.

Ответ: $(1; 0)$.

Как и при решении уравнений, при решении систем иногда используются свойства монотонных функций.

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_{0,7} \dfrac{x}{y} = x - y, \\ y - \sqrt{x} = 6. \end{cases}$

Решение. С учетом положительности искомых значений переменных, которая следует из второго уравнения, перепишем систему в виде $\begin{cases} \log_{0,7} x - x = \log_{0,7} y - y, \\ y - \sqrt{x} = 6. \end{cases}$

Левая и правая части первого уравнения системы представляют собой значения убывающей функции $z = \log_{0,7} t - t$, соответственно, при $t = x$ и при $t = y$. Из их равенства следует, что $x = y$. Получаем систему $\begin{cases} x = y, \\ y - \sqrt{y} = 6, \end{cases}$ второе уравнение которой является квадратным относительно $\sqrt{y}$. Решив его и найдя $y = 9$, получаем ответ.

Ответ: $(9; 9)$.

Как и при решении уравнений, при решении систем часто используется замена переменных.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{15}{4}. \end{cases}$

Решение. Обозначив $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = u$ и $\dfrac{1}{y} = v$, получим:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{5}{2}, \\ u^2 - v^2 = \dfrac{15}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = \dfrac{5}{2}, \\ (u - v)(u + v) = \dfrac{15}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = \dfrac{5}{2}, \\ u - v = \dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2, \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Возвращаемся к переменным x и y: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$.

Иногда замена переменных может даже увеличить их число.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-3x} - 1 = \sqrt{5y-3x}, \\ \sqrt{1-5y} + \sqrt{5y-3x} = 5. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{4-3x} = u$, $\sqrt{5y-3x} = v$ и $\sqrt{1-5y} = z$, где u, v и z могут принимать только неотрицательные значения. Тогда $u^2 - v^2 - z^2 = 3$, и мы получаем систему трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} u - 1 = v, \\ z + v = 5, \\ u^2 - v^2 - z^2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} v = u - 1, \\ z = 6 - u, \\ u^2 - (u-1)^2 - (6-u)^2 = 3. \end{cases}$$

$u^2 - 14u + 40 = 0$, $u = 4$ или $u = 10$,

$\begin{cases} u = 4, \\ v = 3, \\ z = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} u = 10, \\ v = 9, \\ z = -4. \end{cases}$ Заметим сразу, что вторая из полученных систем не удовлетворяет условию введения переменной z ($z \geqslant 0$).

Возвращаясь к переменным x и y, получим:

$$\sqrt{4-3x} = 4,\ x = -4;\ \sqrt{1-5y} = 2,\ y = -\frac{3}{5}.$$

Понятно, что при этом $v = \sqrt{5y-3x} = \sqrt{-3+12} = 3$.

Ответ: $\left(-4; -\frac{3}{5}\right)$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = 1, \\ 3x^2 + 4xy + 2y^2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений называется ***однородной***, так как левые части ее уравнений — однородные многочлены второй степени (каждый член данного многочлена имеет вторую степень). Умножим первое уравнение на 11 и вычтем его из второго уравнения системы: $\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = 1, \\ -8x^2 + 26xy + 57y^2 = 0. \end{cases}$

Получилась система, второе уравнение которой является однородным уравнением второй степени относительно x и y. Поскольку $y = 0$ не удовлетворяет системе, делением на $-y^2$

приводим его к уравнению, являющемуся квадратным относительно $\frac{x}{y}$:

$$8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 26\left(\frac{x}{y}\right) - 57 = 0,\ \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{19}{4}.$$

Таким образом, исходная система свелась к совокупности двух незатейливо решаемых методом подстановки систем:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{19}{4}y, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим еще один тип систем, уравнения которых являются целыми и симметричны относительно переменных, т. е. не изменяются при замене x на y, а y на x. Многочлены, стоящие в левых частях уравнений, называют ***симметрическими***, как и сами системы таких уравнений. Решения одной из простейших симметрических систем $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases}$ можно найти, как корни квадратного уравнения $z^2 - pz + q = 0$, а в более сложных случаях может помочь введение новых переменных: $u = x + y$, $v = xy$.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y + 3xy = 13. \end{cases}$

Решение. Обозначим $x + y = u$, $xy = v$,
тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Получаем:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 10, \\ u + 3v = 13; \end{cases} \begin{cases} (13 - 3v)^2 - 2v = 10, \\ u = 13 - 3v. \end{cases}$$

$$9v^2 - 80v + 159 = 0,\ v_1 = 3,\ v_2 = \frac{53}{9},\ u_1 = 4,\ u_2 = -\frac{14}{3}.$$

Возвращаемся к переменным x и y:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -\frac{14}{3}, \\ xy = \frac{53}{9}, \end{cases}$ $\quad z^2 + \frac{14}{3}z + \frac{53}{9} = 0,$ $\quad 9z^2 + 42z + 53 = 0$, нет решений.

Ответ: (3; 1), (1; 3).

Переход к системе помогает иногда и при решении иррациональных уравнений.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{4+x}=1$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{3-x}=m$, $\sqrt[3]{4+x}=n$. Тогда $m^3=3-x$, $n^3=4+x$ и $m^3+n^3=7$. Получаем симметрическую систему $\begin{cases} m+n=1, \\ m^3+n^3=7. \end{cases}$ С учетом того, что $m+n=1$, преобразуем левую часть второго уравнения:

$m^3+n^3=(m+n)((m+n)^2-3mn)=1-3mn$. Далее имеем: $\begin{cases} m+n=1, \\ mn=-2. \end{cases}$ $z^2-z-2=0$, $z_1=-1$, $z_2=2$; $n_1=-1$, $n_2=2$. Понятно, что записывать значения m излишне.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

1) $\sqrt[3]{4+x}=-1$, $x=-5$; 2) $\sqrt[3]{4+x}=2$, $x=4$.

Подставив найденные значения x в исходное уравнение, убеждаемся, что они действительно являются его корнями.

Ответ: 4; −5.

Упражнения

297. Решите систему уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} x+2y=4, \\ y-3x=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x+y=9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ 3x+4y=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y=3x^2, \\ x+2y=3y^2. \end{cases}$

В чем особенность систем уравнений, которые решаются методом подстановки?

298. Решите систему уравнений методом сложения:

а) $\begin{cases} 3x+2y=13, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$ г)$^\circ$ $\begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 2x+3y-z=11, \\ 3x-2y+2z=-7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+3y=9, \\ 7x+3y=15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y+xy=5, \\ x-y-xy=-7; \end{cases}$

в)$^\circ$ $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+z=6, \\ 2x+y+2z=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+xy=28, \\ y^2+xy=-12. \end{cases}$

В чем особенность систем уравнений, которые решаются методом сложения?

299•. Критическими точками функции

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

являются $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Найдите $P(3)$, если $P(1) = 4$.

300○. Решите систему тригонометрических уравнений:

а) $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin(2x+3y) = 0, \\ \cos(3x-2y) = 1. \end{cases}$

301. Решите систему уравнений, используя метод сложения:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{6}{x-y} = -2, \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{8}{x-2y} + \dfrac{3}{2x+y} = 3, \\ \dfrac{4}{x-2y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -6, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$

в)○ $\begin{cases} \sin^2 x + \cos y = 1, \\ \cos^2 x + \sin y = 1; \end{cases}$ ж)• $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x^2y + y^2x = 120. \end{cases}$

г)○ $\begin{cases} \sin^2 x - \cos y = 1, \\ \cos^2 x - \sin y = 1; \end{cases}$

302○. Решите систему, перемножая ее уравнения или деля одно уравнение на другое:

а) $\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120; \end{cases}$ г)• $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin(x+y)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{\cos y}{\sin(x+y)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^3 - x^3y^2 = 4, \\ x^2y^3 + x^3y^2 = 12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y; \end{cases}$

в)• $\begin{cases} x\sin^2 x = y\cos^2 y, \\ y\sin^2 y = x\cos^2 x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 24, \\ 3^x \cdot 4^y = 54. \end{cases}$

303○. Решите систему уравнений, используя замену переменных:

а) $\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24, \\ y - 2\left(\log_x \frac{1}{2}\right)^3 = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_2 4, \\ 2\log_4 y = 8 - \log_2 4x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5; \end{cases}$ ж)● $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 5; \end{cases}$ з)● $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$

304○. Решите систему уравнений как однородную:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 9y^2 + 8xy = 26, \\ x^2 - 8y^2 - 7xy = 52; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$

305. Решите симметрическую систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y + y^2x = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4^{(x-y)^2 - 1} = 1, \\ 5^{x+y} = 125. \end{cases}$

306●. Решите иррациональное уравнение, при необходимости сводя его к системе:

а) $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6$; д) $\sqrt[3]{20+x} + \sqrt[3]{x-8} = 2$;

б) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-5} = 2$; е) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$;

в) $\sqrt{2y-5} = 1 + \sqrt{y-3}$; ж) $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{7+x} = 4$;

г) $\sqrt{4y+1} = \sqrt{y-2} + 3$; з) $\sqrt[4]{41-x} + \sqrt[4]{41+x} = 4$.

307•. Найдите идею решения и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y - x = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 16^x + 16^y = 68, \\ 16^{x+y} = 256; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3, \\ \lg \dfrac{x}{y} - \log_{0,1} \dfrac{x}{y} = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 7, \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}5, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{7}{4}; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 23, \\ 2x + 3y + 2z = 20, \\ 4x - 3y + z = -11; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + 2y + 3z - t = 2, \\ 3x + 5y + 5z - 3t = 6; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 6 \sin x + 7 \log_y 3 = -10, \\ 2 \log_y 3 - 5 \sin x = 0{,}5; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = 6, \\ \log_4 x + \log_4 y = -3; \end{cases}$

м) $\begin{cases} \sin \dfrac{x}{2} - \sin \dfrac{y}{2} = x - y, \\ 2x^2 - xy + 5y = 6; \end{cases}$

н) $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\ln x}{\ln y}, \\ y - \sqrt{x - 3} = 9; \end{cases}$

о) $\begin{cases} 5 \sin 2x \cdot \operatorname{tg} y = 12, \\ 5 \sin 2y \cdot \operatorname{tg} x = 6. \end{cases}$

308•. Найдите все решения системы $\begin{cases} 5^{\sin x - \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие две системы называют равносильными? Какие преобразования системы заведомо переводят ее в равносильную?

2. Можно ли использовать знаки следования или равносильности при переходе к системе с новыми переменными?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$

16. Задания с параметрами

В большинстве уравнений и неравенств буквами обозначены переменные. Однако бывают случаи, когда буквами заменяют конкретные числа и решают уравнение или неравенство в общем виде. Так, например, решение квадратного уравнения в общем виде привело к формуле корней. В записи общего вида квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, буквами a, b и c заменены все числовые коэффициенты и свободный член квадратного трехчлена, но возможна и замена отдельных чисел.

Буквы, заменяющие в уравнении или неравенстве конкретные числовые данные, называют ***параметрами.***

Со времен Декарта переменные обычно обозначают последними (x, y, z), а параметры — первыми (a, b, c) буквами латинского алфавита. Это позволяет во многих случаях не указывать, какой буквой обозначен параметр, а какой — переменная.

Решая уравнение или неравенство с параметрами, для любых допустимых значений параметров указывают, какими будут его решения.

Пример 1. Решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 < 0$.

Решение. В этом неравенстве один параметр a, который может принимать любые значения.

Если $a = 0$, имеем линейное неравенство $-2x + 1 < 0$, решение которого: $x > 0{,}5$.

Если $a \neq 0$ — неравенство квадратное.

Его дискриминант $1 - a$ положителен при $a < 1$, равен нулю при $a = 1$ и отрицателен при $a > 1$.

При решении квадратных неравенств важен знак старшего коэффициента квадратного трехчлена. Поэтому случай $a < 1$ нужно разбить на $a < 0$ и $0 < a < 1$.

1. Если $a < 0$, то решениями неравенства являются все числа, меньшие меньшего, и все числа, большие большего корня квадратного трехчлена $ax^2 - 2x + 1$:

$$x < \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a} \quad \text{или} \quad x > \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}.$$

2. Если $0 < a < 1$, то решения неравенства расположены между корнями: $\dfrac{1 - \sqrt{1 - a}}{a} < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$.

3. Если $a = 1$ — неравенство не имеет решений.

4. Если $a > 1$ — неравенство не имеет решений.

В ответе указываются все рассмотренные случаи.

Ответ: $a = 0$: $x > 0{,}5$;

$a < 0$: $x < \dfrac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$ или $x > \dfrac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}$;

$0 < a < 1$: $\dfrac{1 - \sqrt{1 - a}}{a} < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$;

$a \geqslant 1$: нет решений.

▼ При выполнении заданий с параметрами на помощь часто приходят различные графические соображения. Так, умение строить график квадратного трехчлена используется в следующем примере, где работа ведется уже с двумя квадратными неравенствами.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3 + a < 0, \\ x^2 - 4x - 3 + a < 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим два квадратных трехчлена $f(x) = x^2 - 2x + 3 + a$ и $g(x) = x^2 - 4x - 3 + a$. Значения x, являющиеся решениями данной системы, одновременно находятся и между корнями трехчлена f, и между корнями трехчлена g, а значит, дискриминанты этих трехчленов должны быть положительными: $\begin{cases} -2 - a > 0, \\ 7 - a > 0; \end{cases}$ $a < -2$.

Сами корни легко получить по формуле корней, однако решение системы неравенств зависит от взаимного расположения корней трехчленов на числовой прямой.

Поскольку старшие коэффициенты квадратных трехчленов равны, параболы, являющиеся их графиками, получаются одна из другой с помощью параллельного переноса. Оказывается, что для выяснения порядка расположения корней таких трехчленов достаточно знать:

1) в какой полуплоскости, верхней или нижней, расположена точка пересечения парабол;

2) как в этой точке расположены касательные к параболам.

Найдем абсциссу x_0 и ординату $f(x_0)$ точки пересечения парабол.

$$f(x) = g(x): x^2 - 2x + 3 + a = x^2 - 4x - 3 + a,\ x_0 = -3;$$

$$f(x_0) = f(-3) = 9 + 6 + 3 + a = 18 + a.$$

Найдем значения производных f' и g' в точке $x_0 = -3$:

$$f'(x) = 2x - 2,\ f'(-3) = 2(-3) - 2 = -8;$$

$$g'(x) = 2x - 4,\ g'(-3) = 2(-3) - 4 = -10.$$

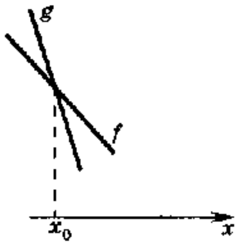


Рис. 103

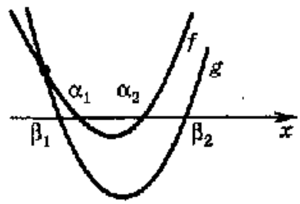


Рис. 104

При $f(x_0) > 0$ окрестность точки пересечения парабол схематически выглядит так, как показано на рисунке 103. Изображенные на этом рисунке части парабол легко продолжить (рис. 104). Параболы пересекают ось абсцисс в ее точках β_1, α_1, α_2 и β_2, где α_1 и β_1 меньшие, а α_2 и β_2 большие корни квадратных трехчленов f и g соответственно. Решением системы в этом случае является интервал $(\alpha_1; \alpha_2)$.

При $f(x_0) < 0$ получаем соответственно рисунки 105 и 106. Решением системы в этом случае является интервал $(\beta_1; \alpha_2)$.

Случаю $f(x_0) = 0$ (рис. 107) соответствует равенство корней $\alpha_1 = \beta_1$. Решением будет интервал $(\alpha_1; \alpha_2)$, как и в случае $f(x_0) > 0$.

Остается выразить результаты нашего исследования через параметр a и записать ответ.

$$f(x_0) \geqslant 0: \begin{cases} a < -2, \\ 18 + a \geqslant 0, \end{cases} \quad -18 \leqslant a < -2;$$

$$f(x_0) < 0: \begin{cases} a < -2, \\ 18 + a < 0, \end{cases} \quad a < -18;$$

$$\alpha_1 = 1 - \sqrt{-2 - a}, \ \alpha_2 = 1 + \sqrt{-2 - a};$$

$$\beta_1 = 2 - \sqrt{7 - a}, \ \beta_2 = 2 + \sqrt{7 - a}.$$

Ответ: $a < -18$: $(2 - \sqrt{7 - a}; 1 + \sqrt{-2 - a})$;
$-18 \leqslant a < -2$: $(1 - \sqrt{-2 - a}; 1 + \sqrt{-2 - a})$;
$a \geqslant -2$: нет решений. △

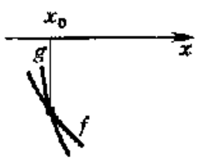


Рис. 105

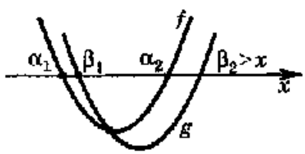


Рис. 106

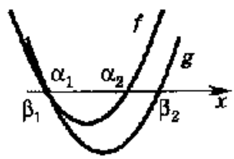


Рис. 107

Во многих задачах с параметрами требуется указать не сами решения, а их количество или найти значения параметра, при которых выполняется некоторое заданное условие.

П р и м е р 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3x-2} = x + a$ имеет единственный корень.

Р е ш е н и е 1. Обозначим $\sqrt{3x-2} = y$, тогда $3x - 2 = y^2$ и $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)$. Получаем:

$$y = \frac{1}{3}(y^2 + 2) + a,\ y^2 - 3y + 2 + 3a = 0.$$

Исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение $y^2 - 3y + 2 + 3a = 0$ имеет единственный неотрицательный корень. Это возможно в трех случаях: 1) когда единственный корень уравнения неотрицателен; 2) когда корни имеют разные знаки; 3) когда один корень равен нулю, а второй отрицателен. Рассмотрим эти случаи.

1. Единственный корень ($D = 0$): $9 - 4(2 + 3a) = 0$, $a = \frac{1}{12}$. При этом значении a единственный корень уравнения равен $\frac{3}{2}$ (положителен).

2. Корни разных знаков: $2 + 3a < 0$, $a < -\frac{2}{3}$.

3. Один из корней равен нулю: $2 + 3a = 0$, $a = -\frac{2}{3}$. При этом значении a второй корень равен 3 (положителен). Значит, в этом случае уравнение имеет два корня, что не соответствует заданию.

Р е ш е н и е 2. График функции $y = \sqrt{3x-2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вправо на 2 с последующим сжатием к оси ординат в 3 раза.

Графиком функции $y = x + a$, при любом a является прямая, параллельная прямой $y = x$ (рис. 108).

Из рисунка видно, что графики имеют единственную общую точку при $a = a_1$ (касание графиков) и при $a < a_2$.

Значение a_2, очевидно, равно $-\frac{2}{3}$, а для нахождения a_1 можно приравнять нулю дискриминант уравнения, которое получится после возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения:

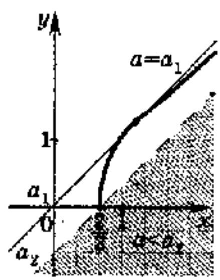


Рис. 108

$$3x - 2 = (x + a)^2,\ x^2 + x(2a - 3) + a^2 + 2 = 0;$$

$$D = 0\colon (2a - 3)^2 - 4(a^2 + 2) = 0,\ a = \frac{1}{12}.$$

О т в е т: $a = \frac{1}{12}, a < -\frac{2}{3}$.

П р и м е р 4. При каких значениях a уравнение

$$x^2 - a = 2|x|$$

имеет четыре корня?

Р е ш е н и е 1. Перепишем данное уравнение:

$$x^2 - 2|x| + 1 = a + 1,\ (|x| - 1)^2 = a + 1.$$

Левая часть уравнения задает функцию, график которой получается из параболы $y = x^2$ сдвигом на 1 вправо и симметрией точек графика, расположенных в правой полуплоскости относительно оси ординат. Правой части уравнения соответствует прямая, перпендикулярная оси ординат и пересекающая ее в точке $a + 1$.

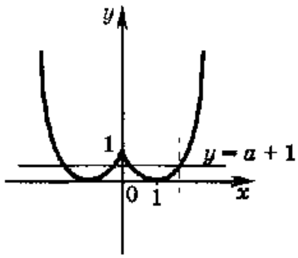


Рис. 109

На рисунке 109 видно, что графики имеют четыре общие точки, если прямая $y = a + 1$ пересекает ось ординат между 0 и 1.

Значит, $0 < a + 1 < 1$, $-1 < a < 0$.

Р е ш е н и е 2. Обозначим $|x| = y$. Искомые значения a соответствуют случаю двух положительных корней уравнения $y^2 - 2y - a = 0$. Значит, меньший корень этого уравнения должен быть больше нуля:

$$1 - \sqrt{1 + a} > 0,\ \sqrt{1 + a} < 1,\ 0 < 1 + a < 1,\ -1 < a < 0.$$

О т в е т: $-1 < a < 0$.

П р и м е р 5. Найти все значения параметра a, при которых решением неравенства $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} \leqslant 2$ является отрезок.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство, попутно упростив его: $|x - a| \leqslant 2 - \sqrt{5 - x}$. Выражение, стоящее в правой части неравенства, задает функцию, график которой получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ в результате сдвига на 5 влево, симметрии относительно начала координат и сдвига на 2 вверх: $\sqrt{x} \to \sqrt{x + 5} \to -\sqrt{-x + 5} \to 2 - \sqrt{-x + 5}$.

Левой части неравенства соответствует график функции $y = |x|$, который сдвигается на a вдоль оси абсцисс (рис. 110).

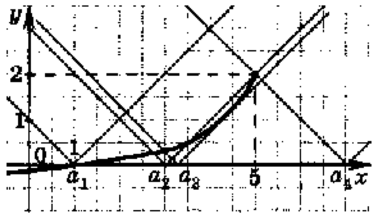


Рис. 110

Ответом к задаче будут два промежутка: $a_1 < a < a_2$ и $a_3 \leqslant a < a_4$. Вычислений требует только значение a_3, соответствующее случаю касания, а остальные три значения a легко устанавливаются по рисунку: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_4 = 7$.

Найдем a_3. Угловой коэффициент касательной равен 1, значит, абсцисса точки касания находится из уравнения $(2 - \sqrt{5-x})' = 1$, $\frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 1$, $5 - x = \frac{1}{4}$, $x_0 = 4\frac{3}{4}$. При этом значении x ординаты точек кривой и касательной совпадут, значит, $4\frac{3}{4} - a = 2 - \sqrt{5 - 4\frac{3}{4}}$, $a = 3\frac{1}{4}$.

О т в е т: $1 < a < 3$, $3\frac{1}{4} \leqslant a < 7$.

При решении некоторых уравнений и неравенств оказывается удобным временно поменять ролями параметр и переменную, т. е. считать параметр переменной, а переменную параметром.

П р и м е р 6. Решить неравенство

$$4x^4 + 4ax^2 + 32x + a^2 + 8a > 0$$

при всех положительных значениях a.

Р е ш е н и е. Левая часть неравенства является многочленом четвертой степени относительно x и всего лишь второй степени относительно a. Попытаемся поэтому разложить левую часть на множители как квадратный трехчлен $a^2 + (4x^2 + 8)a + 4x^4 + 32x$.

$$\frac{D}{4} = (2x^2 + 4)^2 - 4x^4 - 32x = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x-1)^2;$$

$$a_{1,2} = -2x^2 - 4 \pm 4(x-1);$$

$$a^2 + (4x^2 + 8)a + 4x^4 + 32x = (a + 2x^2 - 4x + 8)(a + 2x^2 + 4x).$$

Вернем теперь x звание переменной и, рассматривая выражения в скобках как квадратные трехчлены относительно x, решим неравенство: $(2x^2 - 4x + 8 + a)(2x^2 + 4x + a) > 0$.

При $a > 0$ значения трехчлена в первой скобке положительны. Трехчлен во второй скобке имеет два корня при $a < 2$, один корень при $a = 2$ и не имеет корней при $a > 2$. Найдя корни по формуле корней, записываем ответ.

О т в е т: $0 < a < 2$: $x < \frac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2}$ или $x > \frac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2}$; $a = 2$: $x \neq -1$; $a > 2$: любое число.

П р и м е р 7. Найти все значения a, при которых решением неравенства $|2x^2 + x - a - 8| \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4$ является отрезок.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + x - a - 8 \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4, \\ 2x^2 + x - a - 8 \geqslant -x^2 - 2x + 2a + 4. \end{cases}$$

Упрощая, получим: $\begin{cases} a \leqslant -x^2 + x + 4, \\ a \leqslant x^2 + x - 4. \end{cases}$

Будем рассматривать параметр a как переменную и отметим на координатной плоскости xOa множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе. Эти точки одновременно находятся под обеими параболами $a = -x^2 + x + 4$ и $a = x^2 + x - 4$ (рис. 111). Приравнивая друг другу правые части этих уравнений, находим координаты точек пересечения парабол: $(-2; -2)$ и $(2; 2)$.

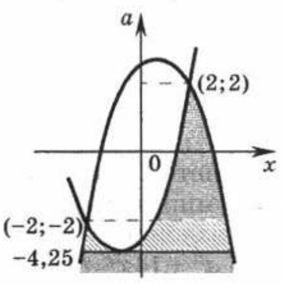


Рис. 111

На рисунке видно, что некоторые прямые, параллельные оси абсцисс, имеют с закрашенной областью общий отрезок. Наша задача — указать ординаты точек этих прямых. Это, во-первых, ординаты вершины параболы $a = x^2 + x - 4$ ($x_0 = -0,5$; $a_0 = -4,25$) и точек, расположенных ниже нее. Во-вторых, это точки интервала $(-2; 2)$.

О т в е т: при $a \leqslant -4,25$ и $|a| < 2$.

Рассмотрим еще два примера, в которых ключевым является требование единственности решения.

П р и м е р 8. При каких значениях параметра a уравнение $\cos ax = 2 - \cos x$ имеет единственный корень?

Р е ш е н и е. При всех значениях a данное уравнение имеет корень $x = 0$. Чтобы этот корень оказался единственным, $\cos ax$ и $\cos x$ не должны одновременно принимать значение 1 ни при каком другом значении x. Отсюда $\frac{2\pi m}{a} \neq 2\pi n$ ($m, n \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$). Имеем $a \neq \frac{m}{n}$.

Дробью $\frac{m}{n}$ можно записать любое рациональное число, значит, неравенство $a \neq \frac{m}{n}$ говорит о том, что a не является рациональным числом.

О т в е т: при любых иррациональных значениях a.

П р и м е р 9. Найти значения параметров a и b, при которых система $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Р е ш е н и е. Заметим, что система не изменится, если одновременно поменять знаки у x и y, т. е. если тройка чисел $(\alpha; \beta; \gamma)$ является решением системы, то и тройка $(-\alpha; -\beta; \gamma)$ тоже ее решение. Эти решения в силу требования единственности должны совпадать, что может произойти только при $x = y = 0$. Но тогда система принимает вид $\begin{cases} z = a, \\ z = b, \\ z^2 = 4, \end{cases}$ откуда $b = a = \pm 2$.

Единственное решение система может иметь только при этих значениях параметров, а вот имеет ли — следует проверить.

Проверка.

1. $a = b = 2$: $\begin{cases} xzy + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое: $\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xy(z^2 - z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

Второе равенство системы выполняется, когда хотя бы один из множителей произведения $xyz(z - 1)$ обращается в нуль. Подстановка в систему значения $x = 0$ приводит к решению $(0; 0; 2)$. К этому же решению приводит и подстановка $y = 0$. Значение $z = 0$ не удовлетворяет первому уравнению системы, а при $z = 1$ получаем систему $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ которая имеет ненулевые решения. Значит, при $a = b = 2$ система имеет несколько решений, что не соответствует заданию.

2. $a = b = -2$: $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz\,(z - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

Подставляя, как и в первом случае, значение $x = 0$, получаем решение $(0; 0; -2)$. К этому же решению приводит и подстановка $y = 0$. Значение $z = 0$ не удовлетворяет системе, а при $z = 1$ получаем систему $\begin{cases} xy = -3, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ которая не имеет решений.

Значит, при $a = b = -2$ система имеет единственное решение.

Ответ: система имеет единственное решение при $a = b = -2$.

Упражнения

309. Найдите все значения параметра a, при которых не имеет корней уравнение:

а) $ax = 2x + 1$; б) $x = 2ax + 2$.

310•. Решите уравнение относительно переменной x:

а) $(a^2 + a - 12)x = a^2 - 2a - 3$;

б) $(a^2 - 4a + 3)x = a^2 - 6a + 5$.

311. 1) При каком значении параметра b корень уравнения $3x(b + 4) = 6b + 35$ в 2 раза больше корня уравнения $2(x + 1) = 3(x - 2)$?

2) При каком значении параметра a корень уравнения $a(2x - 1) - 1 = 4a - x$ в 4 раза меньше корня уравнения $x - 7 = 3(3 - x)$?

312*. Стороны треугольника a, b и c. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник в зависимости от d, если $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$ и $c \leqslant d$?

313•. Найдите все значения a, при которых число 2:

1) является корнем уравнения:

а) $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0$; в) $\left(a + 2x^3 - \operatorname{tg}\frac{7\pi x}{2}\right)\sqrt{ax + 1} = 0$;

б) $|x - a| \cdot x + a - 3 = 0$; г) $\sqrt{2 \cdot 2^x - a} = x^2 + a$;

2) не является решением неравенства $-2 \leqslant |x + 3a| - x^2$.

314. Найдите значения параметра a, при которых:

1) число нуль является корнем уравнения

$$\sqrt{a\cos 2x - 8\sin 2x} = \cos x;$$

2) число $-\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения

$$\sqrt{2\sin 2x - a\cos 2x} = -\sin x.$$

Для найденных значений a решите данное уравнение.

315. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(0,2)^x = \frac{2a+3}{5-a}$:

а) не имеет корней; б)$^{\circ}$ имеет отрицательные корни.

316. Линейным или квадратным является уравнение $5b(b-2)x^2 + (5b-2)x - 16 = 0$ относительно x при:

а) $b = 1$; б) $b = 2$; в) $b = 0{,}4$; г) $b = 0$?

317. Определите вид уравнения $2ax(x-1) + x(ax-12) = 3x + 8$ относительно x при:

а) $a = 1$; б) $a = -6$; в) $a = -2$; г) $a = 0$.

318. При каких значениях параметра a уравнение

$ax(ax+3) + 6 = x(ax-6)$ является:

а) квадратным; б) неполным квадратным; в) линейным?

319. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - 2x + c = 0$; в) $mx^2 - 6x + 1 = 0$;

б) $x^2 - ax = 0$; г) $12x^2 + 7cx + c^2 = 0$.

320. Решите уравнение:

а) $(m-1)x^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$;

б)$^{\circ}$ $\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}$.

321°. Найдите значения параметра a, при которых сумма квадратов корней квадратного трехчлена $x^2 - ax + a - 1$ является наименьшей.

322. Для всех допустимых значений параметра a решите неравенство:

а) $\frac{x}{a+2} > 2x - a$; б) $\frac{x}{a-4} \geqslant 3x - 2a$.

323. При каких значениях параметра a система уравнений:

а) $\begin{cases} 4x + ay = 2, \\ ax + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений;

б) $\begin{cases} 4x + ay = 4, \\ ax + y = 3 \end{cases}$ не имеет решений?

324. Найдите все значения параметра a, при которых не имеет корней уравнение:

а) $ax^2 + 2ax + x = 1$; б) $a^2x = a(x+2) - 2$.

325. При каких значениях a параболы $y = x^2 + ax - a$ и $y = 2x^2 - x + a$ не имеют общих точек?

326°**.** Найдите все значения a, для которых уравнение:

а) $x^2 - 2(a - 1)x + (2a + 1) = 0$ имеет два положительных корня;

б) $x^2 - 2(a - 2)x + a = 0$ имеет один корень;

в) $x^2 + (a - 3)x + a = 0$ имеет единственный положительный корень.

327. При каких значениях параметра уравнение:

1) $(b - 1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0$;

2) $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 6 = 0$

имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) единственный корень; г) корни разных знаков?

328$^{\bullet}$**.** Определите, при каких значениях параметра a уравнение:

а) $\log_2 (4^x - a) = x + 1$ имеет два корня;

б) $\log_3 (9^x + a) = x$ имеет единственный корень.

329°**.** Найдите число корней уравнения:

а) $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = a$; б) $\dfrac{5x^2 + 7}{x^2 + 2} = a$.

330$^{\bullet}$**.** Найдите все значения b, при которых уравнение $x^2 + x + b = 0$ будет иметь:

а) два корня, большие, чем b;

б) один из корней больше, а другой меньше, чем b.

331$^{\bullet}$**.** Найдите все значения параметра d, при которых неравенство $6x - 7 - dx^2 > 0$ имеет решения, причем все они меньше 1.

332$^{\bullet}$**.** При каких значениях параметра:

а) оба корня квадратного уравнения $x^2 - 2bx - 1 = 0$ не превосходят по модулю 2;

б) уравнение $\sqrt{x - 1}\,(4x^2 - a^2x - 3a) = 0$ имеет два корня?

333$^{\bullet}$**.** Найдите все значения параметра t, при которых каждое число на отрезке $[1; 2]$ является решением неравенства $x^2 - tx + 1 < 0$.

334$^{\bullet}$**.** При каких значениях c на отрезке $[-1; 1]$ содержится только один корень уравнения $cx^2 + (2c - 1)x - 1 = 0$?

335$^{\bullet}$**. Найдите все значения параметра a, при которых:**

а) оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат отрезку $[1; 3]$;

б) все нули функции $f(x) = (a - 2)x^2 + 2ax + a + 3$ лежат внутри интервала $(-2; 1)$.

336$^{\bullet}$**.** При каких значениях a уравнения $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$, $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения?

337. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} 2x^2 - 3ax - 9 > 0, \\ x^2 + ax - 2 < 0 \end{cases}$ не имеет решений?

338$^{\bullet}$**.** Найдите все значения параметра m, при которых квадратный трехчлен $x^2 + mx + m^2 + 6m$ отрицателен при всех значениях переменной x, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 2$.

339. При каких значениях параметра a уравнение:

а)$^{\circ}$ $\frac{x + a}{x + 1} + \frac{a - 3x}{x - 3} = 2$ имеет единственный корень;

б)$^{\bullet}$ $x^2 - 4x - 2|x - a| + 2 + a = 0$ имеет ровно два корня;

в)$^{\bullet}$ $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три корня?

340. С помощью производной найдите значения a, при которых ровно два корня имеет уравнение:

а) $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$;

б) $2x^3 + 3x^2 - 36x - a + 2 = 0$.

341°**.** Решите уравнение, раскладывая на множители его левую часть:

а) $2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0$;

б) $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$.

342$^{\bullet}$**.** Введите параметр $a = \sqrt{2}$ и решите уравнение:

а) $x^4 - 2\sqrt{2}\,x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$;

б) $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$;

в) $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0$.

343$^\bullet$. При каких значениях параметра система неравенств:

а) $\begin{cases} ax - 1 \leqslant 0, \\ x - 4a \geqslant 0 \end{cases}$ имеет решение;

б) $\begin{cases} (x + p)^2 \geqslant 16, \\ x(x + 4) \leqslant p \end{cases}$ имеет единственное решение;

в) $\begin{cases} x^2 + bx - 2b^2 > 0, \\ b^2x^2 + 3bx - 4 < 0 \end{cases}$ не имеет решений;

г) $\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

344$^\bullet$. Выясните, при каких значениях параметра a система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений;

б) $\begin{cases} y = x^2 + ax + a, \\ x = y^2 + ay + a \end{cases}$ имеет единственное решение.

345°. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 2} + \dfrac{1}{\log_y 2} = 1, \\ y = a(x - 3) \end{cases}$ имеет единственное решение.

346$^\bullet$. Найдите число решений системы уравнений в зависимости от значений параметра:

а) $\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = 3a - 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = a, \\ x + y = a. \end{cases}$

347$^\bullet$. Решите уравнение относительно x:

а) $3 \cos x = 4c + 1$;

б) $(b^2 - 9) \sin x = b + 3$;

в) $\sin^2 x - 2a \sin x + 2a^2 - 2a + 1 = 0$;

г) $\cos 2x - a \cos x + a^2 + 1 = 0$.

348$^\bullet$. Найдите все значения параметра a, при которых область значений функции $y = a \sin x - 3\,|\cos x|$ содержит отрезок $[-6; 5]$.

349$^\bullet$**.** При каких значениях параметра a уравнение $2\cos^2 x + (2a+1)\sin x - a - 2 = 0$ имеет на интервале $(0; \pi)$ ровно: а) один; б) два; в) три; г) четыре корня?

350°**.** При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение:

а) $\sqrt{|x|} = ax + 2$; в)$^\bullet$ $z|z + 2a| + 1 - a = 0$;

б) $\sqrt{2(|x| - x)} = ax + 2$; г)$^\bullet$ $1 + \{x\} = \cos^2 ax$?

351°**.** При каких значениях параметров имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} 2xyz + y = a, \\ 2xy^2z + y = b, \\ 4(1 - x^2) = z^2 + y^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xyz + x = a, \\ x^2yz + x = b, \\ 4(1 - x^2) = z^2 + y^2? \end{cases}$

Контрольные вопросы и задания

1. Что значит решить уравнение с параметром?

2. Какие условия должны выполняться, чтобы оба корня квадратного трехчлена $ax^2 - 2a^2x - 2$ были больше 1? Найдите соответствующие значения a.

3. Решите неравенство $\log_a x > 2$.

ГЛАВА

6

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Первыми числами, с которыми вы познакомились, были натуральные. Затем появились целые, рациональные и действительные числа. Каждое новое множество чисел содержало предшествующее и расширяло вычислительные возможности. Так переход от натуральных чисел к целым позволил вычитать из меньшего числа большее, переход к рациональным числам снял ограничения с деления (кроме деления на нуль), а действительные числа дали возможность вычислять корни. Однако вычисление корней четных степеней из отрицательных чисел остается невозможным и на множестве действительных чисел. Снять это ограничение должна последняя глава нашего учебника, которая познакомит вас с самым широким числовым множеством — множеством комплексных чисел.

17. Формула корней кубического уравнения

К концу XIV в. европейские математики познакомились с основными достижениями античной, арабской и индийской науки, однако сами еще не внесли существенного вклада в развитие математики. В частности, в вопросе решения уравнений знания ограничивались квадратными уравнениями и системами уравнений, приводившими к решению квадратных уравнений. Из кубических и других уравнений высших степеней удавалось решить лишь некоторые. Сложилось мнение, что все значительные результаты в математике уже достигнуты. Поэтому открытие итальянскими математиками XVI в. способа решения любых кубических уравнений произвело огромное впечатление на ученых того времени. Убедившись, что труды древних далеко не исчерпали возможностей науки, европейские математики стали активно заниматься научными исследованиями.

Первым способ решения кубических уравнений нашел Сципион дель Ферро[1] — профессор из Болоньи. Узнав об этом, венецианский математик Никколо Тарталья[2], готовясь в 1535 г. к математическому поединку с одним из учеников дель Ферро, самостоятельно вывел формулу корней кубического уравнения. Как и его предшественник, Тарталья не стал сообщать о своем открытии — владение «секретом» позволяло добиваться побед в конкурсах на занятие профессорских должностей.

Впервые формулу корней

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

для уравнений вида $x^3 + px + q = 0$ опубликовал в 1545 г. миланский врач и математик Джеронимо Кардано в своем большом математическом труде «Великое искусство». И хотя Кардано узнал формулу от Тартальи, ее стали называть формулой Кардано. Эта формула известна всем математикам, однако воистину знаменитым имя Кардано сделал изобретенный им *карданный* вал.

Может показаться, что формула Кардано относится только к частному случаю кубических уравнений, у которых коэффициент при x^2 равен нулю. Однако любое кубическое уравнение можно легко привести к такому виду простой заменой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = 0$.

Решение. Сначала с помощью замены y на $x + 1$ избавимся от члена, содержащего вторую степень переменной:

$$y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 9(x + 1) - 14 =$$

$$= x^3 + \underline{3x^2} + 3x + 1 - \underline{3x^2} - 6x - 3 + 9x + 9 - 14 = x^3 + 6x - 7.$$

Мы получили уравнение $x^3 + 6x - 7 = 0$, к которому и применим теперь формулу Кардано:

$$x = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} + 8}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} + 8}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}} = 2 - 1 = 1.$$

---

[1] Сципион дель Фéрро (1465—1526) — итальянский математик. С его именем связано открытие правила решения в радикалах одного типа кубических уравнений.

[2] Никколо Тартáлья (1499—1557) — итальянский ученый. Основные труды по математике, механике, баллистике, геодезии, фортификации.

Конечно, этот корень намного легче получить, заметив, что сумма коэффициентов многочлена $x^3 + 6x - 7$ равна нулю.

Найдя один корень, мы можем с помощью деления уголком на $x - 1$ или с помощью схемы Горнера разложить многочлен $x^3 + 6x - 7$ на множители: $x^3 + 6x - 7 = (x - 1)(x^2 + x + 7)$. Поскольку второй множитель в нуль не обращается, можно сделать вывод о единственности найденного корня. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $y = 2$.

При использовании формулы Кардано математики встретились с неожиданным препятствием. Применим формулу Кардано к уравнению $x^3 - 6x - 4 = 0$:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}.$$

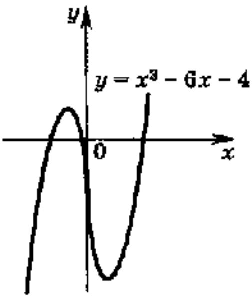


Рис. 112

Формула «выдала» выражение, которое не имеет смысла, — не существует действительного числа, квадрат которого равен −4. Однако само уравнение, конечно, имеет корни, причем нетрудно, построив, например, схематический график функции $y = x^3 - 6x - 4$, убедиться в том, что у этого уравнения их три (рис. 112). Можно также среди делителей свободного члена отыскать число −2, которое является корнем этого уравнения и, разложив левую часть на множители:

$$x^3 - 6x - 4 = (x + 2)(x^2 - 2x - 2),$$

найти еще два его корня: $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$.

Упражнения

352. Используя формулу Кардано, решите кубическое уравнение:

а) $x^3 + 6x + 2 = 0$; в) $x^3 + 15x - 124 = 0$;

б) $x^3 + 12x - 12 = 0$; г) $x^3 + 5x - 84 = 0$.

353. Приведите к виду $x^3 + px + q = 0$ уравнение:

а) $x^3 + 9x^2 - 15x + 36 = 0$;

б) $2x^3 - 12x^2 + 54x - 36 = 0$.

354. Найдите кратчайшее расстояние от точки $A(4; 0)$ до параболы $y = x^2$.

Контрольные вопросы

1. С каким затруднением встретились математики при использовании формулы Кардано?

2. Как вы думаете, почему проблема нехватки чисел возникла при использовании формулы корней кубических уравнений, а не квадратных, в которых дискриминант может оказаться отрицательным числом?

18. Комплексные числа

Проблема, возникшая в связи с использованием формулы Кардано, требовала расширения понятия числа за счет введения новых чисел и правил действий с ними. Однако Кардано этого сделать не удалось. Успех пришел к другому итальянскому математику и инженеру Рафаэлю Бомбелли. В книге «Алгебра» (1572) он подробно рассмотрел различные случаи, которые встречаются при решении кубических уравнений. Идея Бомбелли была гениально проста: *действовать с корнями из отрицательных чисел по тем же правилам, что и с действительными числами.*

Знакомство с этими новыми числами, получившими, в конце концов, название *комплексных*[1], мы начнем с решения квадратных уравнений. Ведь именно при их решении впервые встретился квадратный корень из отрицательного числа.

Используем формулу корней для решения квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}.$$

До сих пор мы считали, что такие выражения не имеют смысла. Действительно, ни среди рациональных, ни среди иррациональных чисел нет числа, квадрат которого равен числу -9, а следовательно, данное уравнение не имеет действительных корней.

Попробуем теперь рассматривать выражения, содержащие квадратные корни из отрицательных чисел, применяя к ним, как Р. Бомбелли, те же правила действий, что и к действительным числам.

---

[1] Термин «комплексные», от латинского слова *complexus* — соединение, ввел Карл Гаусс в 1831 г.

Прежде всего заметим, что квадратный корень из отрицательного числа можно представить в виде произведения действительного числа и квадратного корня из числа −1, например:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}.$$

Выражение $\sqrt{-1}$ по предложению Л. Эйлера стали обозначать буквой i (первой буквой латинского слова *imaginarius* — мнимый) и называть ***мнимой единицей***.

Мнимая единица — это число, квадрат которого равен −1:

$$i^2 = -1.$$

Используя это обозначение, можно записать, что

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i.$$

Каждое из выражений $2 + 3i$ и $2 - 3i$ состоит из двух частей: действительной (число 2) и мнимой (соответственно $3i$ и $-3i$).

Выражение вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица, называют ***комплексным числом***.

Если коэффициент b мнимой части комплексного числа равен нулю, то получается действительное число a. При $a = 0$ комплексное число $a + bi$ называют ***чисто мнимым***.

Равенство двух комплексных чисел означает равенства их действительных частей и коэффициентов их мнимых частей:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

Проверим теперь, что число $2 - 3i$ действительно является корнем уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$, т. е. что

$(2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 0.$

Раскроем скобки в левой части равенства:

$$(2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13.$$

Заменим i^2 числом −1 и приведем подобные члены:

$$4 - 12i + \underline{9i^2} - 8 + 12i + 13 = 4 - 12i \underline{- 9} - 8 + 12i + 13 = 0.$$

Аналогично можно убедиться и в том, что мнимое число $2 + 3i$ тоже является корнем этого уравнения.

Введение комплексных чисел сняло ограничение с дискриминанта квадратного уравнения — каждое квадратное уравнение имеет комплексный корень.

Вообще, *любое целое рациональное уравнение имеет комплексный корень.*

Это утверждение — **основная теорема алгебры**[1]. Из нее, в частности, следует, что многочлен степени n с комплексным переменным z можно представить в виде произведения n линейных множителей:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n =$$
$$= a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1})(z - z_n),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные корни многочлена, причем необязательно различные.

▼ Доказать это можно с помощью теоремы Безу[2], по которой и на множестве комплексных чисел $P_n(z) = (z - z_n)Q_{n-1}$, где $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ — многочлены степени n и $n - 1$ соответственно, а z_n — корень многочлена $P_n(z)$. △

Покажем на примере квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$, что в случае мнимых корней верны формулы Виета. Сумма корней данного уравнения должна быть равна числу 4:

$$(2 - 3i) + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 4,$$

а произведение — числу 13:

$$(2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$$

Во всех рассмотренных примерах с комплексными числами производились арифметические действия[3].

Результат арифметических действий с комплексными числами можно представить в виде комплексного числа $x + yi$, где x и y — действительные числа:

1) $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$;

2) $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$;

---

[1] Основная теорема алгебры была сформулирована в XVII в., но первое строгое доказательство было дано в конце XVIII в. К. Гауссом. С тех пор были опубликованы десятки различных доказательств. Чисто алгебраического способа доказательства этой теоремы не существует — приходится использовать методы математического анализа, что говорит о неразрывности математической науки в целом.

[2] Этьен Безу́ (1730—1783) — французский математик, член Парижской академии наук. Основные его работы выполнены в области алгебры. В частности, им разработаны методы решения систем уравнений методом исключения переменных. Теорема Безу опубликована в работе «Общая теория алгебраических уравнений» в Париже в 1779 г.

[3] Мы уже отмечали, что в 1572 г. вышла книга итальянского математика Р. Бомбелли, в котором были установлены первые правила арифметических операций над комплексными числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.

3) $(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i$;

4) $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + bi)(c - di)} = \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc + ad}{c^2 + d^2} i$, где хотя бы одно из чисел c или d должно быть отлично от нуля.

В последнем случае, чтобы получить в знаменателе действительное число, мы умножили числитель и знаменатель на комплексное число $c - di$, отличающееся от знаменателя $c + di$ только знаком коэффициента мнимой части.

Комплексные числа $z = c + di$ и $\overline{z} = c - di$ называют **сопряженными.**

Прием умножения дроби на сопряженное знаменателю число часто используется в преобразованиях выражений с комплексными числами.

Пример 1. Упростить выражение $\frac{2i}{3 - i}$.

Решение.

$$\frac{2i}{3 - i} = \frac{2i(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{2(3i + i^2)}{3 - i^2} = \frac{2(-1 + 3i)}{3 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i.$$

Пример 2. Найти все действительные значения x и y, при которых числа $y^2 - \frac{x}{i} - 2x + 4i$ и $3 - \frac{y^2}{i} - 3xi$ равны между собой.

Решение. Приведем оба данных числа к виду $a + bi$, где a и b действительные числа:

$$y^2 - \frac{x}{i} - 2x + 4i = y^2 - \frac{xi}{i^2} - 2x + 4i =$$

$$= y^2 + xi - 2x + 4i = (y^2 - 2x) + (x + 4)i,$$

$$3 - \frac{y^2}{i} - 3xi = 3 + y^2 i - 3xi = 3 + (y^2 - 3x)i.$$

Приравняв действительные части и коэффициенты при мнимых частях этих чисел, получим и решим систему:

$$\begin{cases} y^2 - 2x = 3, \\ x + 4 = y^2 - 3x, \end{cases} \begin{cases} y^2 = 2x + 3, \\ x + 4 = 2x + 3 - 3x, \end{cases} \begin{cases} y^2 = -1 + 3, \\ x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \begin{cases} y = \pm\sqrt{2}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$, $y = \sqrt{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

Упражнения

355. Решите квадратное уравнение:

а) $x^2 + 10x + 26 = 0$; в) $9x^2 - 6x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 14x + 74 = 0$; г) $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

356●. Подберите целый корень и, разложив левую часть на множители, найдите все корни уравнения:

а) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$; г) $2x^3 - 7x^2 + 11x - 10 = 0$;

б) $x^3 - 2x^2 + 2x + 5 = 0$; д) $4x^3 - 2x^2 - 27x - 9 = 0$.

в) $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0$;

357. С помощью формул Виета составьте квадратное уравнение, корнями которого являются мнимые числа: а) $1 + i$ и $1 - i$; б) $-3 + 4i$ и $-3 - 4i$.

358. Приведите к виду $x + yi$, где x и y — действительные числа, выражение:

а) $(3 - 2i)(i - 3)$; в) $\frac{2}{1 - i}$; д) $\frac{2 - 5i}{1 + i}$;

б) $(5 - 2i)(4 + 2i)$; г) $\frac{5i}{8 - 4i}$; е) $\frac{3 - 4i}{1 - 3i}$.

359. При каком условии: а) сумма; б) разность; в) произведение; г) частное двух комплексных чисел является действительным числом?

360○. Найдите значение выражения:

а) $z^3 - 4z^2 + 28z$ при $z = 2 - 5i$; в) $\frac{5 - 2i}{1 + i} + \frac{5 + 2i}{1 - i}$;

б) $z^3 + 7z^2 + 16z$ при $z = -3 + i$; г) $\frac{10 - 6i}{1 - 3i} + \frac{10 + 6i}{1 + 3i}$.

361○. Найдите действительные числа a и b, если:

а) $(1 + 4i)(a + bi) = 14 + 5i$; в)● $2i + ab - abi = a^2 - b^2i - 3$.

б) $\frac{32 - i}{a + bi} = 3 - 2i$;

362. При каких действительных значениях a и b равны комплексные числа z_1 и z_2:

а) $z_1 = \frac{2i}{a} + 4 - bi$; $z_2 = 3i - \frac{7}{a} + 2b$;

б) $z_1 = (2 + 3i)a - 8i$; $z_2 = 7 - (2 - 3i)(a + bi)$?

363. При каких действительных значениях x и y комплексные числа z_1 и z_2 являются сопряженными:

а) $z_1 = x^2 + yi - 5 - \frac{7}{i}$ и $z_2 = -y - x^2i - 4i$;

б)○ $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xyi^5$ и $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$?

364°. Докажите, что:

а) $1 + i + i^2 + i^3 = 0$; б)• $i + i^2 + i^3 + ... + i^{99} + i^{100} = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое мнимая единица? При каком условии комплексное число является действительным?

2. Сформулируйте правила сложения и вычитания комплексных чисел.

3. Может ли частное двух сопряженных мнимых чисел оказаться действительным числом? При каком условии?

4. Представьте комплексное число $(1 + i)^3$ в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа.

19. Геометрическое представление комплексных чисел

Сам термин «мнимые числа» отражает отношение к ним математиков XVI—XVIII вв. Это отношение изменилось лишь в XIX в. после работ Весселя, Аргана и Гаусса[1], которые на-

---

[1] Каспар Вéссель (1745—1818) — датский математик. В его работе «Об аналитическом представлении направлений» (1799), посвященной векторам, впервые дано геометрическое представление комплексных чисел. В течение столетия это сочинение оставалось неизвестным, и его результаты открывались вновь.

Жан Роберт Аргáн (1768—1822) — швейцарский математик, который дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел на плоскости (1806), ввел термин «модуль комплексного числа» (1814—1815).

Карл Фридрих Гáусс (1777—1855) — родился в бедной крестьянской семье. Способности к математике у него проявились очень рано, по этому поводу он сам шутя говорил, что складывать научился раньше, чем говорить. Увлекаясь и филологией, и математикой, в 19 лет Гаусс выбрал математику, где им было уже сделано открытие — построение циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника. Спонсорство его учителя начальных классов, которого Карл поразил, почти мгновенно вычислив сумму натуральных чисел от 1 до 100, дало возможность Гауссу окончить Гёттингенский университет. В этом университете он всю жизнь и проработал профессором и директором обсерватории. Работы Гаусса оказали огромное влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории тяготения, теории электричества и магнетизма, геодезии и др. После смерти Гаусса издано 12 томов его сочинений, но до сих пор многие исследования не опубликованы.

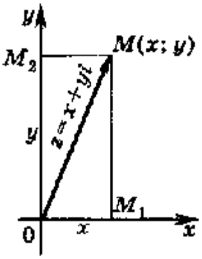


Рис. 113

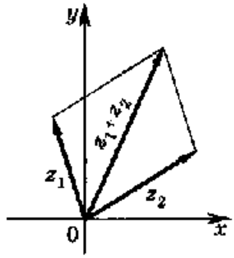


Рис. 114

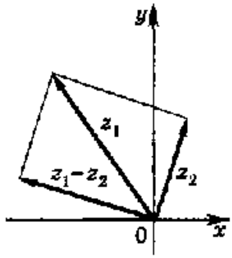


Рис. 115

шли комплексным числам и действиям с ними простое геометрическое истолкование.

Комплексное число $z = x + yi$ можно изобразить на координатной плоскости в виде вектора OM (рис. 113). Координаты x и y вектора OM являются, соответственно, действительной частью и коэффициентом мнимой части комплексного числа z. При этом каждому комплексному числу соответствует некоторый вектор, а различным комплексным числам соответствуют различные векторы.

С другой стороны, координаты любого вектора можно рассматривать как действительную часть и коэффициент мнимой части некоторого комплексного числа.

При такой интерпретации *сумма* двух комплексных чисел изображается вектором, равным *сумме векторов* (рис. 114), а *разность* двух комплексных чисел — вектором, равным *разности* соответствующих векторов (рис. 115).

Длину вектора OM (см. рис. 113), равную $\sqrt{x^2 + y^2}$, называют ***модулем комплексного числа*** $z = x + yi$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $3 < |z + 4 - 3i| \leqslant 4$, где $z = x + yi$.

Решение. Под знаком модуля стоит разность комплексных чисел: $z - (-4 + 3i)$.

Данное в условии неравенство показывает, что конец вектора z должен находиться от конца вектора $(-4 + 3i)$ более, чем в трех единицах длины, но не дальше, чем в четырех. Другими словами, конец вектора z должен быть одновременно внутри круга радиуса 4 с центром в точке $(-4; 3)$

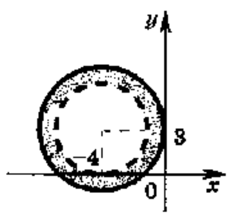


Рис. 116

и вне круга с тем же центром и радиусом 3, т. е. в кольце (рис. 116).

П р и м е р 2. Решить уравнение $|z| - iz = 1 - 2i$.

Р е ш е н и е. Запишем z как $x + yi$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - i(x + yi) = 1 - 2i,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y - xi - 1 + 2i = 0.$$

Приравняв к нулю отдельно действительную часть и коэффициент при мнимой части комплексного числа $\sqrt{x^2 + y^2} + y - xi - 1 + 2i$, получим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + y - 1 = 0, \\ -x + 2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2^2 + y^2} = 1 - y, \\ x = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + y^2 = 1 + y^2 - 2y, \\ x = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}, \\ x = 2. \end{cases}$$

О т в е т: $z = 2 - \frac{3}{2}i$.

Упражнения

365. Представьте изображенные на рисунке 117 комплексные числа в виде $x + yi$ и найдите их модули.

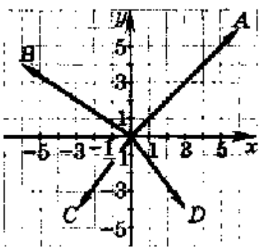


Рис. 117

366. Изобразите на координатной плоскости комплексное число:

а) 5; д) $2 + 2i$; и) $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

б) $-2i$; е) $2 - 2i$; к) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

в) -1; ж) $-3 - 3i$; л) $1 - i\sqrt{3}$;

г) $10i$; з) $-3 + 3i$; м) $-\sqrt{3} - i$.

367°. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $|z - 1| = |z + 1|$; г) $(1 - i)\overline{z} = (1 + i)z$;

б) $|z + 1 - i| = |z - 1 + i|$; д)$^{\bullet}$ $|z + 6| = 2|z|$;

в) $|z|^2 + 3z - 3\overline{z} = 0$; е)$^{\bullet}$ $3|z - 10| = |z + 2|$.

368$^{\bullet}$. Докажите, что $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, где $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $(c^2 + d^2 \neq 0)$.

369°. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $|z-1|>|z+1|$; б)• $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leqslant 1$; в) $0<|z+1+2i| \leqslant 2$.

370°. Решите систему уравнений $|z+1-i|=|3-z-i|=|z+i|$.

371•. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z+1+i| \leqslant 1$, найдите число с наибольшим модулем.

372•. Найдите число с наименьшим модулем среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1+i| \geqslant 3$; б) $|z+1-i| \leqslant 1$; в) $|z+1-i| \geqslant 1$.

373•. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} |z+1-i|=\sqrt{2}, \\ |z|=3 \end{cases}$ не имеет решений.

Контрольные вопросы и задания

1. Как называются комплексные числа, которые изображаются векторами, симметричными относительно оси абсцисс?

2. Что можно сказать о комплексных числах, которые изображаются сонаправленными ненулевыми векторами?

3. Есть ли среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-3+i|=5$, сопряженные?

20. Тригонометрическая форма комплексного числа

Если начала всех векторов, имеющих модуль, равный r, поместить в точку $O(0; 0)$, то их концы образуют окружность радиуса r с центром в начале координат (рис. 118). Каждый из этих векторов, например OM (рис. 119), может быть получен

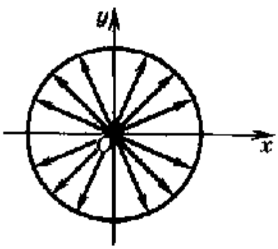


Рис. 118

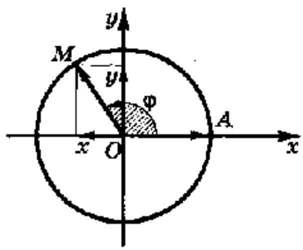


Рис. 119

в результате поворота вектора OA вокруг начала координат на угол φ, который называют ***аргументом комплексного числа*** z и обозначают $\arg z$ (заметим, что таких углов бесконечно много и они отличаются друг от друга на $2\pi k$, $k \in Z$). Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и, следовательно:

$$z = x + yi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *называют* ***тригонометрической формой комплексного числа.***

В тригонометрической форме с комплексными числами намного удобнее выполнять умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Пусть даны два комплексных числа:

$$u = 6\,(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \text{ и } v = 2\,(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ).$$

Найдем произведение этих чисел:

$$uv = (6\,(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ))(2\,(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)) =$$

$$= 6\cdot 2\,(\cos 30^\circ\cos 15^\circ + i\sin 30^\circ\cos 15^\circ +$$

$$+ i\cos 30^\circ\sin 15^\circ + i^2\sin 30^\circ\sin 15^\circ) =$$

$$= 6\cdot 2\,((\cos 30^\circ\cos 15^\circ - \sin 30^\circ\sin 15^\circ) +$$

$$+ i\,(\sin 30^\circ\cos 15^\circ + \cos 30^\circ\sin 15^\circ)) =$$

$$= 6\cdot 2\,(\cos(30^\circ + 15^\circ) + i\sin(30^\circ + 15^\circ)) =$$

$$= 6\cdot 2\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}\,.$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Вспомним теперь, что разделить число u на число v — значит найти такое число z, что $zv = u$. Пусть модуль числа z равен r, а его аргумент равен φ. Тогда $r\cdot 2 = 6$ и $\varphi + 15^\circ = 30^\circ$. Отсюда $r = \frac{6}{2} = 3$ и $\varphi = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$, т. е. $z = 3\,(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$.

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

При умножении и делении комплексных чисел их аргументы ведут себя так же, как показатели степеней с одинаковыми основаниями: $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$. Это сходство навело Л. Эйлера[1] на мысль записать комплексное число в виде степени в так называемой ***показательной*** форме $z = re^{i\varphi}$. Так появилось *тождество Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Это тождество и легко получаемые из него формулы

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

нашли широкое применение в математике. В знак уважения к их создателю первую букву его фамилии стали использовать для обозначения числа e.

Отдав должное памяти великого Леонарда Эйлера, вернемся к действиям с комплексными числами в тригонометрической форме.

Возведение в степень с натуральным показателем n сводится к нахождению произведения, в котором n одинаковых множителей. Пусть $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, тогда

$$z^n = (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n =$$

$$= \underbrace{(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))\cdot\ldots\cdot(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))}_{n \text{ множителей}} =$$

$$= r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

---

[1] Леонард Э́йлер (1707—1783) родился в Швейцарии в семье пастора. В 1720 г. поступил в университет, где уже в 17 лет был удостоен степени магистра искусств за речь, посвященную сравнению философии Р. Декарта и И. Ньютона. В 19 лет опубликовал в журнале свою первую научную работу. С 1727 г. и до конца жизни работал в Петербургской Академии Наук. Л. Эйлер — великий ученый, сделавший открытия во всех известных в его время разделах математики и механики, теории упругости, математической физике, оптике, теории музыки, теории машин и др. Эйлер одним из первых написал учебники по математическому анализу. Математический аппарат он разрабатывал для решения проблем естествознания, поэтому около 60% работ Эйлера относятся к математике, остальные — преимущественно к ее приложениям. В последние 13 лет своей жизни, потеряв зрение, он диктовал свои работы ученикам. Опубликовано 70 томов собраний сочинений Эйлера, сроки завершения работы над архивами трудно предсказать. Каждая страна—участница этого международного проекта получает один экземпляр каждого тома, издание выходит малым тиражом и является раритетным.

В 1837 г. Петербургская Академия Наук воздвигла памятник на могиле Эйлера, в 1956 г. его прах был перенесен в Ленинградский некрополь.

Формула возведения комплексного числа в степень была выведена А. Муавром[1] в начале XVIII в. и носит его имя.

При возведении комплексного числа в степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Умение возводить в степень комплексные числа помогает в тригонометрии при вычислении значений кратных углов.

Пример 1. Найти $\cos 5\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Попробуем выразить $\cos 5\alpha$ через тригонометрические функции угла α. В этом нам поможет формула Муавра. При $n = 5$ из нее получаем:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha.$$

Раскрываем скобки:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos^5\alpha + 5\cos^4\alpha\cdot i\sin\alpha + 10\cos^3\alpha\cdot(i\sin\alpha)^2 +$$

$$+ 10\cos^2\alpha\cdot(i\sin\alpha)^3 + 5\cos\alpha\cdot(i\sin\alpha)^4 + (i\sin\alpha)^5 =$$

$$= \cos^5\alpha + 5i\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha - 10i\cos^2\alpha\sin^3\alpha +$$

$$+ 5\cos\alpha\sin^4\alpha + i\sin^5\alpha = (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+ 5\cos\alpha\sin^4\alpha) + i(5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha)$$

и приравниваем действительные части правой и левой частей равенства:

$$\mathbf{\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha.}$$

Найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ и подставим значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в полученную формулу:

$$\cos 5\alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)^5 - 10\left(-\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4 =$$

$$= \frac{-243 + 4320 - 3840}{5^5} = \frac{237}{3125}.$$

Ответ: $\frac{237}{3125}$.

Нам осталось разобрать, как извлекать корень из комплексного числа. Извлечем, например, кубический корень из числа $u = 27(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$.

---

[1] Абрахам де Муа́вр (1667—1754) — английский математик, член Лондонского королевского общества, член Парижской и Берлинской академий наук. Муавр вывел правило возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел в 1707 г.

Пусть модуль комплексного числа $z = \sqrt[3]{u}$ равен r, а его аргумент φ, тогда, поскольку $(\sqrt[3]{u})^3 = u$, получим: $r^3 = 27$, а $3\varphi = 135°$. Отсюда $r = \sqrt[3]{27} = 3$ и $\varphi = \frac{135°}{3} = 45°$, т. е. $z = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$.

При извлечении корня из комплексного числа извлекается корень из его модуля, а аргумент делится на показатель степени корня.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Казалось бы, все просто. Вспомним однако, что у комплексного числа имеется бесконечно много аргументов, отличающихся на $360° \cdot k$, поэтому корень из комплексного числа оказывается не единственным. Так, в рассмотренном примере мы могли в качестве аргумента числа u взять угол $135° + 360°$, и получить $\varphi_2 = \frac{135° + 360°}{3} = 165°$.

Если же взять $135° + 2 \cdot 360°$, то $\varphi_3 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 45° + 2 \cdot 120° = 285°$.

Заметим, что аргумент кубического корня из числа u каждый раз увеличивается на $120°$, а модуль не изменяется. Геометрически это означает, что соответствующий вектор *поворачивается* на $120°$ вокруг начала координат.

Может показаться, что, продолжая прибавлять к аргументу u по $360°$, мы будем получать все новые и новые кубические корни. Проверим это предположение: $\varphi_4 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 45° + 3 \cdot 120°$. Мы действительно нашли новый угол, однако, поскольку $\cos(45° + 360°) = \cos 45°$ и $\sin(45° + 360°) = \sin 45°$, то у нас получился уже найденный корень $z_1 = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$.

Векторы $z_1 = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$, $z_2 = 3(\cos 165° + i\sin 165°)$ и $z_3 = 3(\cos 285° + i\sin 285°)$ получаются один из другого поворотом на $120°$ по (или против) часовой стрелке вокруг начала координат. Поскольку именно к такому повороту и приводит увеличение (уменьшение) аргумента числа u на угол $360°$, понятно, что новых значений кубического корня мы не получим.

Мы встретились с удивительной ситуацией, когда выражение $\sqrt[3]{u}$ имеет три разных значения, а не одно, как мы привыкли при вычислениях с действительными числами.

Аналогично можно показать, что существует четыре различных корня четвертой степени из комплексного числа, причем концы соответствующих им векторов расположены в вершинах квадрата. Вообще,

существует n различных корней n-й степени из комплексного числа, отличного от нуля.

Теперь становится понятным, как по формуле Кардано найти все три корня рассмотренного в пункте 1 кубического уравнения $x^3 - 6x - 4 = 0$:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} =$$

$$= \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{8}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)} +$$

$$+ \sqrt[3]{\sqrt{8}(\cos (-45^\circ) + i \sin (-45^\circ))} =$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt[3]{\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ} + \sqrt[3]{\cos (-45^\circ) + i \sin (-45^\circ)}).$$

Каждый из двух кубических корней, в сумме дающих корень кубического уравнения, имеет три значения. Чтобы получить действительные корни уравнения, из них следует выбрать пары сопряженных комплексных чисел:

$$x_1 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ + \cos (-15^\circ) + i \sin (-15^\circ)) =$$
$$= 2\sqrt{2} \cos 15^\circ;$$

$$x_2 = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ + \cos (-135^\circ) + i \sin (-135^\circ)) =$$
$$= 2\sqrt{2} \cos 135^\circ;$$

$$x_3 = \sqrt{2}(\cos 255^\circ + i \sin 255^\circ + \cos (-255^\circ) + i \sin (-255^\circ)) =$$
$$= 2\sqrt{2} \cos 255^\circ.$$

Преобразовав полученные выражения, получим уже знакомые нам из примера 1 пункта 17 числа:

$$2\sqrt{2} \cos 15^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ = 4 \cos 45^\circ \cos 15^\circ =$$

$$= 2(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) = 1 + \sqrt{3},$$

$$2\sqrt{2} \cos 135^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2,$$

$$2\sqrt{2} \cos 255^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin 15^\circ) = -4 \sin 45^\circ \sin 15^\circ =$$

$$= -2(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = 1 - \sqrt{3}.$$

Упражнения

374. Представьте комплексные числа, указанные в 366 предыдущего пункта, в тригонометрической форме.

375$^\bullet$. Представьте изображенные на рисунке 117 предыдущего пункта комплексные числа в тригонометрической форме.

376°. Найдите аргументы чисел:

а) $1 + 2i$; б) $-3 - 5i$; в) $3 + 2i$; г) $4 - 3i$.

377. Запишите в виде $x + yi$ следующие числа:

а) $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$;

б) $\sqrt{2}\,(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))$;

в) $\sqrt{3}\,(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$;

г)$^\bullet$ $3\left(\cos \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + i \sin \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.

378. Найдите произведение комплексных чисел u и v, если:

а) $u = 3(\cos 16^\circ + i \sin 16^\circ)$, $v = 2(\cos 74^\circ + i \sin 74^\circ)$;

б) $u = 5(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$, $v = 0{,}2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$.

379. Найдите: а) $(1 + i)^{10}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{16}$.

380$^\bullet$. Найдите:

а) $\sin 5\alpha$; б) $\cos 4\alpha$; в) $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\cos \alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

381. Найдите частное $\frac{u}{v}$, если:

а) $u = 6(\cos 16^\circ + i \sin 16^\circ)$, $v = 3(\cos(61^\circ) + i \sin(61^\circ))$;

б) $u = 5(\cos(-14^\circ) + i \sin(-14^\circ))$,
$v = 0{,}2(\cos 44^\circ + i \sin 44^\circ)$.

382. Докажите, что: а) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

383$^\bullet$. Какой наименьший модуль может иметь выражение $z + \frac{1}{z}$?

384. Найдите все значения z, удовлетворяющие уравнению $z^2 + |z| = 0$.

385. Найдите все комплексные значения выражения:

а) $\sqrt{1+i}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$; в) $\sqrt[4]{-1-i}$; г) $\sqrt[5]{1}$; д) $\sqrt[6]{-1}$.

386●. Найдите все комплексные числа z **такие, что:**

а) $(\overline{z})^3 = 2 - 2i\sqrt{3}$; б) $(\overline{z})^6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

387●. Решите по формуле Кардано уравнение:

а) $x^3 - 2x + 4 = 0$; б)● $x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие арифметические действия удобно выполнять с комплексными числами в тригонометрической форме? Что такое показательная форма комплексного числа?

2. Запишите формулу Муавра для комплексного числа с модулем, равным 1.

3. Представьте в виде $a + bi$ корни шестой степени из 1.

Вскоре после открытия формулы корней кубического уравнения ученик Кардано Людовико Феррари нашел способ решения произвольных уравнений четвертой степени. Однако для уравнения пятой степени отыскать такой способ никому не удавалось. Точку в этих поисках поставил Нильс Абель[1], доказав невозможность существования общих формул корней для уравнений пятой и более высоких степеней.

За время обучения в школе ваши представления о числах прошли большой путь: от натуральных чисел к рациональ-

[1] Нильс А́бель (1802—1829) — норвежский математик. Работа об уравнениях пятой степени — лишь одно из его великих достижений. Этими уравнениями он занимался еще в школе, и ему показалось, что он вывел формулу для их решения. Никто в Норвегии не мог проверить доказательство, в котором Нильс сам затем нашел ошибку. В 16 лет Абель по совету своего учителя начал читать труды Ньютона, Эйлера и Лагранжа, а через несколько лет открытия стал совершать он сам. Родившись в многодетной семье пастора, он всю свою короткую жизнь прожил в бедности и умер от туберкулеза в возрасте 27 лет. В математике Нильс Абель оставил видный след, его именем названы интегралы, группы. В королевском парке в столице Норвегии г. Осло стоит скульптура сказочного юноши, попирающего двух поверженных чудовищ, которые символизируют уравнения 5-й степени. По цоколю идет надпись «ABEL».

ным, затем к действительным и, наконец, к комплексным. У человечества этот путь растянулся почти на всю его историю.

Каждый раз при расширении понятия числа приобретались новые более широкие возможности, но были и некоторые потери. Так, например, работая с натуральными числами, мы могли для каждого числа указать следующее, а перейдя к рациональным, обнаружили, что следующего числа нет, так как между любыми двумя рациональными числами есть третье. На множестве комплексных чисел мы потеряли существенно больше, а именно возможность сравнивать числа, так как нельзя установить, какое из комплексных чисел больше, или, как говорят математики, — нельзя *упорядочить* множество комплексных чисел.

Однако для комплексных чисел сохранились основные законы арифметических действий, с которыми вы познакомились еще в начальной школе: переместительный, сочетательный и распределительный законы, свойства нуля при сложении и единицы при умножении.

Оказалось, что дальнейшее расширение понятия числа без отказа от некоторых из этих законов невозможно. Этот факт установил в XIX в. Карл Гаусс.

На этом наш курс алгебры и начал анализа завершен.

Авторы желают вам новых встреч с математикой в аудиториях выбранных вами вузов.

Домашние контрольные работы

Контрольная работа № 1 (90 мин)

I уровень

1. На рисунке 120 изображены графики некоторых функций.

1) Какие из этих функций являются непрерывными?

2) Укажите точки разрыва разрывных функций.

3) Запишите для каждой функции ее промежутки возрастания и убывания.

2. Найдите предел функции:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

3. Какие из графиков следующих функций имеют:

а) вертикальные; б) горизонтальные асимптоты?

Запишите уравнения этих асимптот.

1) $y = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$; 3) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

2) $y = \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

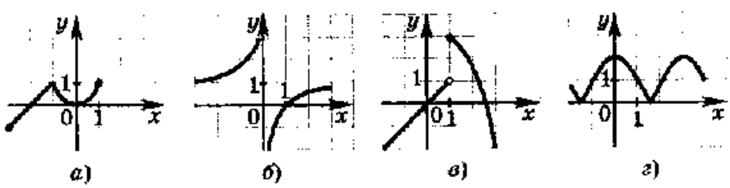


Рис. 120

4. Найдите уравнение наклонной асимптоты графика функции $y = \frac{x^2+1}{x}$ и изобразите сам график.

5. Решите уравнение $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

II уровень

6. Докажите непрерывность функции $y = 2x - 1$ в точке $x_0 = 3$.

7. Задайте аналитически функции, графики которых изображены на рисунке 120.

8. Найдите область значений функции $y = \frac{x+1}{x}$.

9. Решите неравенство $(\ln^2 x - 1)(4x^2 - 5x + 1) > 0$.

III уровень

10. 1) Найдите уравнение наклонной асимптоты графика функции $y = \frac{6x^3 - 5x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$.

2) Определите, есть ли у этого графика вертикальные асимптоты, и изобразите сам график.

11. Решите тригонометрическое уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5.$$

Контрольная работа № 2
(90 мин)

I уровень

1. На рисунке 121 изображен график функции $y = f(x)$.

1) В каких точках графика касательная к нему: а) не существует; б) параллельна оси абсцисс; в) наклонена к положительному направлению оси абсцисс под острым углом; г) имеет отрицательный угловой коэффициент?

2) Укажите: а) критические точки; б) точки максимума; в) точки минимума функции.

3) В каких точках функция принимает: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение? Чему они равны?

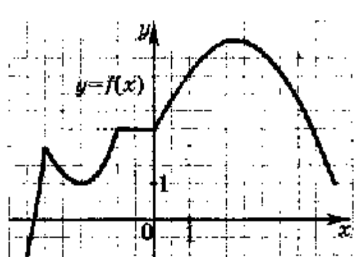


Рис. 121

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = -3$.

3. Решите уравнение $\sin^2 x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4}$.

II уровень

4. Решите неравенство $(2x + 3)\sqrt{4x - 3x^2 - 1} \leqslant 0$.

5. Дана функция $y = x^3 - 3x$.

1) Найдите по определению производную функции.

2) Напишите уравнение касательной к графику функции:

а) параллельной; б) перпендикулярной прямой $y = 2x$.

3) Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции.

III уровень

4) Найдите с помощью производной приближенное значение функции при $x = 0{,}98$.

5) Используя калькулятор, найдите абсолютную и относительную погрешности полученного приближения.

6) Постройте график данной функции.

6. Докажите, что функция $y = \sqrt{x^2 - 9} \cdot (x^5 - \sin x)$ нечетная.

7. В равнобедренный треугольник, основание которого на 7 м больше высоты, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на боковых сторонах треугольника, а две другие — на его основании. Выразите площадь треугольника S как функцию длины x стороны квадрата. Найдите площадь треугольника, если известно, что сторона вписанного квадрата равна 12 см.

Контрольная работа № 3
(120 мин)

I уровень

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ в точке $x_0 = 3$.

2. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t + \sin^2 t$ (м), где t с — время движения.

1) Какую скорость будет иметь тело в момент времени $t = \frac{3\pi}{4}$?

2) Найдите силу, которая действует на тело.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2}{x + 2}$ на отрезке [1; 5].

4. Исследуйте с помощью производной функцию $y = x^3 + 3x^2 + 2$ и постройте ее график.

5. Решите неравенство $\log_2(x-1) + \log_2 x < 1$.

II уровень

6. Найдите два положительных числа, сумма которых равна трем, если известно, что произведение первого числа на квадратный корень из второго максимально.

7. Решите уравнение $3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

III уровень

8. Дана функция $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$

1) Найдите производную этой функции.

2) Существует ли предел: а) $\lim\limits_{x \to 0} y$; б) $\lim\limits_{x \to 0} y'$?

9. Найдите уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y^2x - yx^2 + 6 = 0$, в точке $K(3; 2)$.

10. Используя первую и вторую производную, исследуйте функцию $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ и постройте ее график.

Контрольная работа № 4 (120 мин)

I уровень

1. Запишите в виде интеграла площади фигур, ограниченных графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (рис. 122).

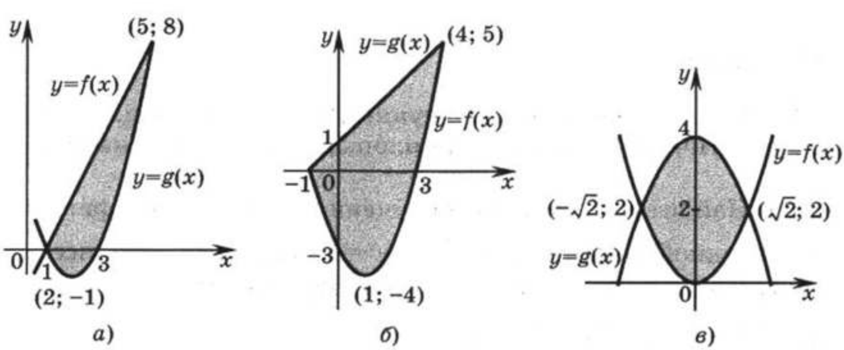


Рис. 122

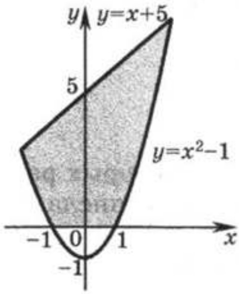


Рис. 123

2. Какая из функций:

а) $F(x) = \cos 2x - \ln x + 2$;

б) $F(x) = \sin 2x - x \ln x + 5$;

в) $F(x) = \sin 2x - x - \ln x$

является первообразной для функции $f(x) = 2\cos 2x - \dfrac{1}{x} - 1$?

3. Найдите первообразную функции $y = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$, график которой проходит через точку $A(1; 0)$.

4. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 123.

5. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant 0$.

II уровень

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = \dfrac{2}{x}$, $y = 2$, $x = 2$.

7. Тело стартует из точки, принятой за начало отсчета, и движется прямолинейно со скоростью, которая изменяется по закону $v(t) = t + \sqrt[3]{2t+1}$ (м/с).

1) Найдите путь, пройденный телом за первые 13 с движения.

2) Чему равно стартовое ускорение тела?

8. Решите уравнение $\log_2 x - \log_{0,5}(x-2) = 3$.

III уровень

9. Зная, что кривые на рисунке 122 — параболы, задайте их аналитически и вычислите площади заштрихованных фигур.

10. Найдите объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x$, вокруг оси абсцисс.

11. Вычислите, используя геометрическую интерпретацию, $\int\limits_0^6 \left(\left|x - 1\right| + \left|3 - \frac{x}{6}\right|\right) dx$.

Контрольная работа № 5
(120 мин)

I уровень

1. Решите уравнение:

а) $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$; б) $\sqrt{3x^2 + 2x - 12} = 2$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8. \end{cases}$

3. Найдите все значения параметра a, при которых график функции $y = 2ax + 3a^2 - 2a$ пересекает ось ординат в ее отрицательной части.

4. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 4x = a$ имеет единственный положительный корень?

II уровень

5. Решите неравенство $\sin x - \sin 3x < 0$.

6. При всех значениях параметра b решите уравнение $\log_2(4^x - b) = x$.

7. При каких значениях a функция $y = x^3 + 2x^2 + ax - 5$ не имеет критических точек?

III уровень

8. При каком значении параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Контрольная работа № 6
(90 мин)

I уровень

1. Решите уравнение $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. Выполните действия $\dfrac{(1-i)(3+i)}{2-i} - \dfrac{4-i}{2-i}$.

3. Изобразите на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z + 3| = 1$; б) $|z - 2 + i| = |z - i + 2|$, где $z = x + yi$.

4. Докажите тождество $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha) - \dfrac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

II уровень

5. Найдите все значения выражения $\sqrt[3]{1 - i}$.

6. Решите уравнение $z^2 - (2 + 3i)z + 4i - 2 = 0$.

7. Решите неравенство $25^{t+2} \geqslant (0{,}2)^{\frac{t-7}{t}}$.

III уровень

8. Решите уравнение $|z| - 2z = 2i - 1$.

9. Найдите все комплексные числа z такие, что $z^{-4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

Ответы

П. 1

1. Непрерывные функции — а, г, ж, з; разрывы имеют функции — б, в, д, е, и. Точки разрыва: б) $x = 0$; в) $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$; д) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; е) $x = 0$; и) $x = 2$. **2.** $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$; 4,42. **3.** а) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$; в) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; 4)$. **7.** 1) а) *а, б, в, г, ж, з*; б) *а, б*. **10.** д) $(\pi - 0{,}00001; \pi + 0{,}00001)$. **11.** д) $|x + 0{,}5| < 1{,}5$.

П. 2

23. а) -2; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0; д) $-\frac{3}{2}$. **24.** 1) *а, д, е*. **25.** а) $\frac{4}{3}$; б) -4; в) -4; г) -2; д) 1; е) 0. **26.** Имеют а, в. **28.** а, в, д, е. **30.** а) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$; б) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$. **31.** а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $0 \leqslant x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $0 \leqslant x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. **32.** 1) $\exists a\ \forall x \in D(f)$, $f(x) > a$; 2) а) нет; б) нет; 3) $\forall a\ \exists x \in D(f)$, $f(x) > a$.

П. 3

35. 2) а) $x = 3$; б) $x = 0$; в) $x = 1$; г) $x = -3$. **40.** 1) в) 1,5; г) 1 при $x \to +\infty$ и -1 при $x \to -\infty$. **41.** а) $y = 3x + 2$; б) $y = 2x + 8$; в) $y = 4x - 1$; г) $y = x$. **43.** 1) а, б, в, г, д, е; 2) б, в, г, е; 3) а, д. а) $x = -1$, $y = x - 1$; г) $x = 3$, $y = 2$; д) $x = 1$, $y = x$; е) $x = \pm\sqrt[4]{3}$, $y = -1$. **44.** 1) Да; 2) а) да, б) нет; в) нет. **45.** а) Вертикальную асимптоту; б) горизонтальную асимптоту $y = a$; в) наклонную асимптоту $y = kx + b$. **46.** 1) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} (g(x) - 3x + 1) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$. **48.** а) $y = \left|x + \frac{1}{x}\right|$; б) $y = \frac{|x| + 1}{x}$. **49.** 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$; 5) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

П. 4

54. 2) а) 1; б) 0; в) −1; г) −2. **55.** а) $k = -2$; б) $k = 0$. **57.** а) $y = -5x + 1$; б) $y = -x + 3$. **58.** а) $(6; -29)$; б) $(-3; -12)$. **59.** $\operatorname{arctg} \frac{1}{553}$. **60.** а) $y = 2\frac{7}{8}$; б) $y = x + 2{,}5$; в) $y = -2x + 2\frac{7}{8}$.

61. а) $y = 2x + 1$; б) $y = -6x - 15$. **62.** Прямая $y = -\frac{1}{4}$.

П. 5

67. Необязательно, кривая может, например, касаться то кривой $y = \frac{1}{x}$, то оси абсцисс и при этом иметь как угодно далеко от начала координат касательные с угловыми коэффициентами 1 и −1. **69.** Это следует из симметрии соответствующих касательных относительно: а) оси ординат ($\operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{tg} \alpha_2$); б) начала координат ($\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$). **71.** а) $y' = 2x$; б) $y' = 3x^2$; в) $y' = -\frac{1}{x^2}$; г) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$; е) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **75.** а) $y = 2$; б) $y = 1$ и $y = \frac{-9x+17}{8}$; в) $y = -x - 2$; г) $y = 0{,}25x + 1$. **76.** 1) б) $y = -4x + 6$; 2) а) $y = 12x - 18$ и $y = 12x + 9$; б) $y = 2$. **77.** а) $y = 2$; б) $y = -x + 3{,}75$; в) $y = x - 0{,}25$; г) $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{15}{16}$. **82.** 1) 1 с; 2) 2 с; 3) 1 м; 4) 3 с. **85.** $8{,}88\pi \approx 27{,}9$ (см^2). **86.** 36 Дж.

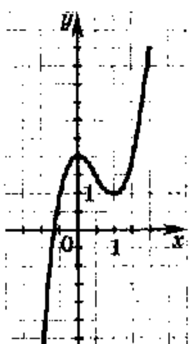


Рис. 124

П. 6

96. а) Убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; г) возрастает на $[0; +\infty)$; д) убывает на $(0; +\infty)$; е) убывает на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$. **98.** См. рисунок 124. **99.** Любая монотонная функция, например $y = \sqrt{x}$. **100.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **101.** 1) а) Нет; б) да; 2) может, достаточно, чтобы функция имела конечное число положительных точек экстремума и не имела экстремума в нуле, как например, функция $y = |x| + \frac{1}{|x|}$.

П. 7

102. г) $5x^4 - 16x^3 + 18x^2$; е) $10x^4 - 44x^3 + 72x^2 - 32x - 8$. **103.** г) $-10x^{-11}$; е) $\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$; з) $2{,}7x^{1{,}7}$; к) $-\frac{8}{7}x^{-\frac{10}{7}}$. **104.** б) $y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$;

г) $y' = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$; е) $y' = -\frac{5}{x^6}$; з) $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **105.** б) $y' = \frac{(3x+1)}{\sqrt{2x}} + 3\sqrt{2x}$; г) $y' = \frac{44x^3}{15}\sqrt[5]{2x^2} - \frac{8x^7}{15}$. **106.** б) $y' = x^2$; г) $y' = 2x^2 - 3x$; е) $y' = = x^{0,5}$; з) $y' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **107.** в) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$; г) $-\frac{\sqrt[5]{16}}{5}$. **108.** а) $y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{4}$; в) $y = -11$, $y = 5$; г) $y = 4x - 2$; $y = 4x + 2\frac{17}{27}$. **109.** (0,25; 0,5). **111.** а) Один; б) два; в) три. **112.** а) $|a| > \frac{4}{9}$; б) $|a| = \frac{4}{9}$; в) $|a| < \frac{4}{9}$. **113.** 1) По теореме Лагранжа при $f(a) = f(b) = 0$ имеем: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, где $c \in (a;\ b)$. **114.** 1) $v = v_0 - gt$;

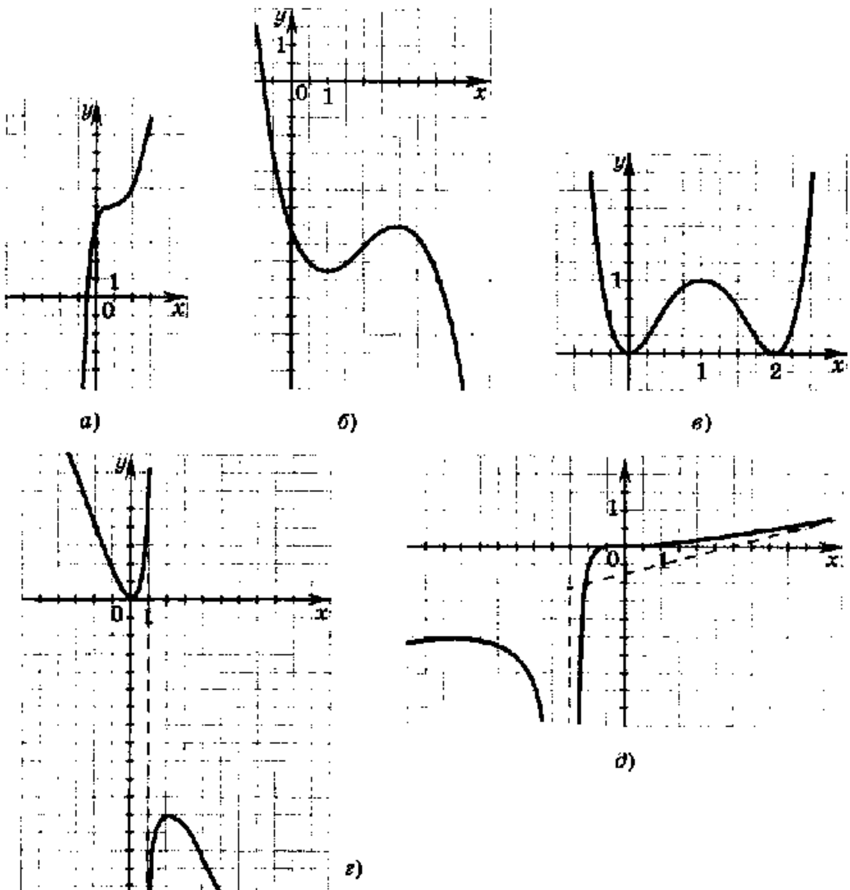


Рис. 125

−12 м/с. **115.** $I(t) = 6t + 2$; 20 А. **116.** а) $y' = 5x^4 - 16x^3 + 9x^2$; б) $y' = \frac{7}{6}\sqrt[6]{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$; в) $-6x^{-4}$; г) $y' = 18x - 54$. **117.** $k = -3$. **118.** а) Да; б) да; в) да; г) да. **124.** а) $y = 0{,}2x$; б) $y = -5x$. **125.** $A(-1{,}5;\ -4)$. **126.** См. рисунок 125. **127.** $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{24}$ или примерно 23°. **128.** (0; −1) и (4; 3). **129.** $y = u'vw + uv'w + uvw'$.

П. 8

130. д) $y = \frac{1}{(5x-1)^2}$; е) $y = \frac{1}{(\lg x + 6)^{10}}$. **132.** 1) $s(x) = x - 2$, $v(s) = |s|$, $u(v) = v - 3$, $f(u) = |u|$; 3) а) 6, −2, 4, 0; б) $a = 3$. **134.** г) $9\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}\right)$. **135.** Третья, $y'(1) = \frac{5}{6}$, $y'(1) = -\frac{1}{4}$, $y'(1) = 120$. **136.** 1) а) $a = -2$; $a = 4$; 2) в)—д) — ни при каких значениях a; г) $a = -14$. **137.** а) Во второй точке. **138.** $k = 8 \pm 2\sqrt{14}$. **139.** а) $y_{\max} = 18^5$, $y_{\min} = -9^5$; б) $y_{\max} = -2{,}5$; $y_{\min} = 1{,}5$. **140.** а) 0; б) $-\frac{3}{2}$; в) $-\frac{2}{13}$; г) $-\frac{37}{144}\sqrt{3}$. **141.** б) $y = 168x + 49$; д) $y = \frac{4}{3}x - 3$; е) $y = -\frac{11}{4}x + \frac{13}{2}$. **142.** $x = 4$. **143.** См. рисунок 126.

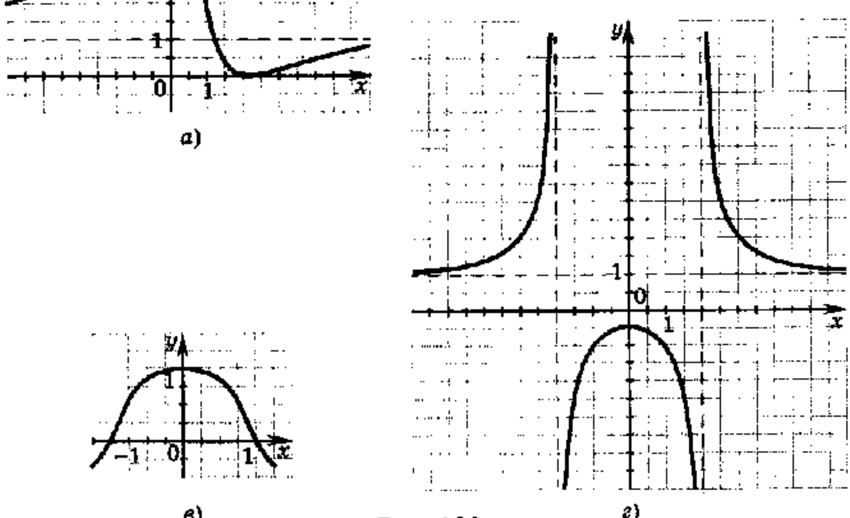


Рис. 126

П. 9

144. 1) а) 1; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\sqrt{2}$; 2) а) 1; б) $\frac{3}{4}$; в) 2; г) 3; д) 0,25. 3) а) e^2; б) e; в) e^m. **145.** а) $e^{f(x)}\cdot f'(x)$; б) $f'(e^t)\cdot e^t$; в) $\frac{f'(x)}{f(x)}$; г) $f'(x)\cdot\cos f(x)$. **147.** $-\frac{m_0\ln 2}{31}\,2^{-\frac{t}{31}}$, «минус» перед выражением показывает, что масса уменьшается, время t измеряется в годах. **148.** $-\frac{1}{4}\ln 2$. **149.** а) Функция возрастает на $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$; функция убывает на $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; $x=\frac{1}{3}$ — точка максимума; б) функция возрастает на $\left(0;\ \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $\left[\frac{2}{\ln 2};\ +\infty\right)$ и $(-\infty;\ 0]$, $x=0$ — точка минимума, $x=\frac{2}{\ln 2}$ — точка максимума; в) функция возрастает на $[-1;\ 0)$ и $[1;\ +\infty)$, убывает $(-\infty;\ -1]$ и $(0;\ 1]$, $x=-1$ и $x=1$ — точки минимума, г) функция возрастает на $(2;\ 3]$, убывает на $[3;\ +\infty)$, $x=3$ — точка максимума. **150.** 1) $\log_9 10 > \log_{10} 11$; 2) 4. **151.** в) $\cos 2x$; д) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; е) $-\frac{6}{9+x^2}$; ж) $-\frac{2x}{|x|\cdot(x^2+1)}$; з) $\frac{2\ln x-2}{x^2+\ln^2 x}$. **152.** а) $x=-\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$; б) $x=\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$; в) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **154.** г) $y=-\frac{2}{3}x+1+\frac{\pi}{6}$. **155.** См. рисунок 127. **157.** При $a\geqslant 1$. **158.** $\frac{\pi}{4}$. **161.** Имеет максимум: а, б, в, г; имеет минимум: а, б, г. **162.** а) $f(x)=3x$ и $g(x)=\frac{x}{3}$; б) $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=x^2$; в) $f(x)=e^{2x}$ и $g(x)=\frac{1}{2}\ln x$; г) $f(x)=\log_a x$ и $g(x)=a^x$. **163.** б) $(0;\ 1)$ и $(1;\ e]$ — промежутки убывания, $[e;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; г) убывает на $(-\infty;\ 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2};\ +\infty\right)$; возрастает на $\left[0;\ \frac{2}{\ln 2}\right]$; е) $(-\infty;\ -0{,}5)$ — интервал возрастания, $(2;\ +\infty)$ — интервал убывания. **164.** в) $y=-\frac{1}{2}x+2$. **165.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

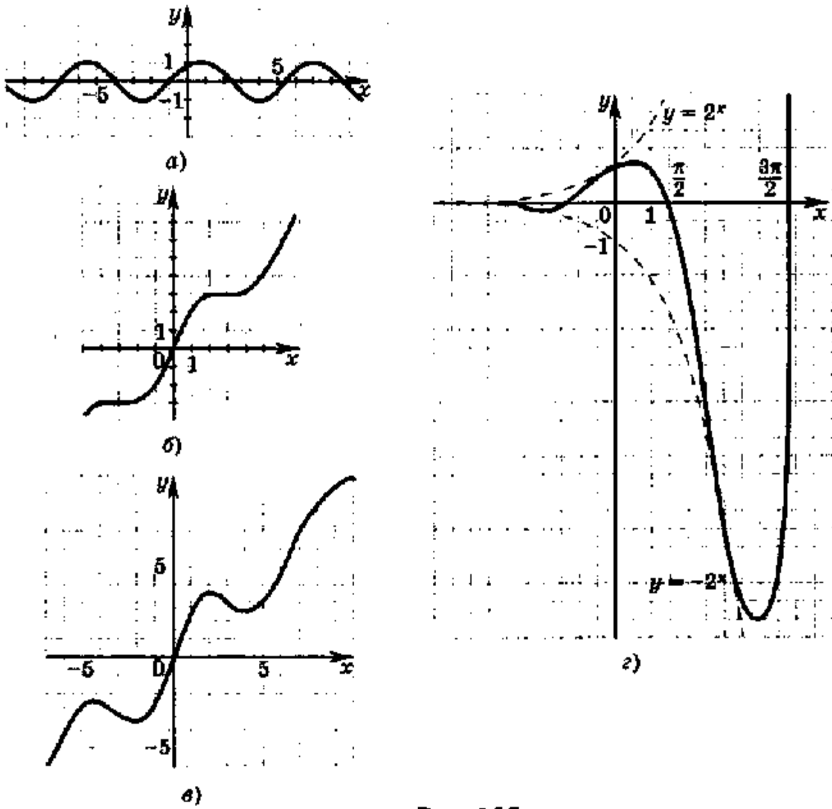


Рис. 127

166. $x = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **167.** $y = 1$. **168.** При $x > 1$: $y' = 0$. **170.** При $x \in (0;\ p]$ — функция возрастает, при $x \in [p;\ +\infty)$ убывает (рис. 128). **171.** 2) $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$. **173.** а) $y = \dfrac{x}{2} + \sqrt{2}$; $y = \dfrac{x}{2} - \sqrt{2}$; б) $y = -\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$. **174.** $(-3;\ 11)$.

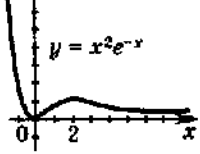


Рис. 128

177. б) $x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-\infty;\ -1)$. **178.** а) $0 < x < e^2$; г) $-2 < x < 0$. **179.** а) $\dfrac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left[-\dfrac{3\pi}{4} + \pi n;\ \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **180.** 1) а) $y' = 2x\sin\dfrac{5}{x} - 5\cos\dfrac{5}{x} + 1$; б) 1.

П. 10

182. б) 80 и 0; в) −4 и −13; г) $e-2$ и $2(1-\ln 2)$; д) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и −2; ж) 1 и $\sqrt{5}$; з) 0 и −3. **183.** $\left[-\frac{\sqrt{29}+5}{2};\ \frac{\sqrt{29}-5}{2}\right]$. **184.** Нет. **185.** а) 2; б) $y_{наиб}=5$, $y_{наим}=2{,}75$. **187.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 0,5. **188.** 2) 1 и 4; 3) 98 и 49; 4) 1 и $e-1$. **189.** $\left(\frac{2}{3};\ \frac{16}{9}\right)$. **190.** $y = -1{,}5x+6$. **191.** Квадрат. **192.** 8 см. **195.** 2 дм². **196.** 12 см, $3\sqrt{3}$ см. **197.** Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. **198.** 8 см². **199.** 10 см². **200.** $\frac{H}{2}$, $\frac{R}{2}$. **201.** $\frac{R\sqrt{6}}{3}$. **202.** а) $\min y = 0$, $\max y = 21+3\ln 2$; б) $\min y = y(-3) = -3$, $\max y = y\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. **203.** $a > b$. **204.** а) $\frac{11\sqrt{2}}{8}$; б) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; в) $\sqrt{2}$. **205.** 2,4. **206.** а) 1 с; б) 7 м/с. **207.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **208.** $R = r$. **209.** $0{,}25a$, $0{,}5a$. **210.** Высота равна радиусу основания. **211.** Радиус донышка банки $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ м. **212.** $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. **213.** $\frac{b}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. **214.** $\sqrt{41}$ м ≈ 6,4 м. **215.** $\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$. **216.** Через $\frac{a}{2v}$ ч наименьшее расстояние будет равно $\frac{a}{2}$ км.

П. 11

217. а) $f''(x) = 2\ln x + 3 - 4\cos 2x$; $f''(1) = 3 - 4\cos 2$, $f''(\pi) = 2\ln\pi - 1$; б) $f''(x) = \frac{-2}{x^2} - \frac{1}{9}\sin\frac{x}{3}$; $f''(3) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9}\sin 1$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-8}{\pi^2} - \frac{1}{18}$. **218.** в) Выпукла на $[1; +\infty)$, вогнута на $(-\infty; 1]$, точка перегиба (1; 2); г) выпукла на $(-\infty; 0]$, вогнута на $[0; +\infty)$, точка перегиба (0; 0); д) выпукла на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, вогнута на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, абсциссы точек перегиба

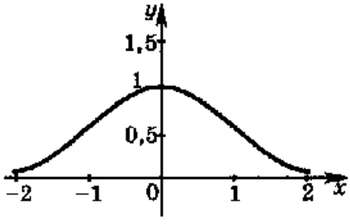


Рис. 129

$\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. **219.** а) Выпукла; б) вогнута. **220.** в) См. рис. 129 и г) рис. 130. **221.** а) Функция $y = x^{100}$ является вогнутой, $\frac{3^{100} + 2^{100}}{2} > \left(\frac{5}{2}\right)^{100}$; б) $\frac{\sqrt[2004]{0,3} + \sqrt[2004]{0,7}}{2} < \sqrt[2004]{0,5}$.

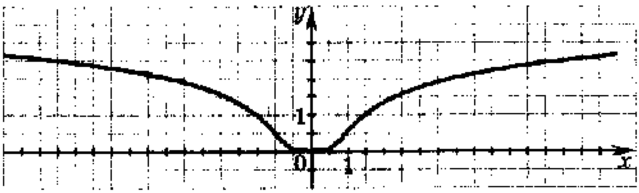


Рис. 130

223. а) $y_{\text{наим}}(1) = -15$; $y_{\text{наиб}}(-1) = 5$; б) $y_{\text{наим}}(1) = 1,5$; $y_{\text{наиб}}(0) = 2$; в) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ и 1; г) наименьшее: $-\frac{3}{\sqrt{5}}$, наибольшее: $-\frac{3}{\sqrt{14}}$. **224.** а) $-\frac{14}{e}$; б) $-\frac{2}{e}$. **226.** а) 21 м/с и 24 м/с^2. **227.** 1 и 4. **229.** $a_1 =$

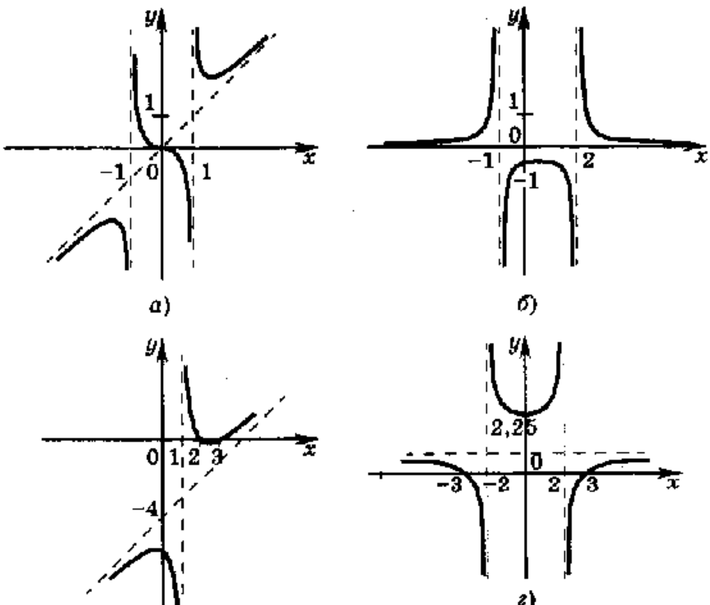


Рис. 131

$= 14$ м/с^2, $a_2 = 18$ м/с^2. **232.** б) $v = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, $a = \frac{\pi^2}{18}$. **233.** а) $-2\sqrt{2}\,m$; б) $4m$. **238.** См. рисунок 131.

П. 12

239. Только *а*) и *в*). **240.** 1) а, б; площадь не изменится; 2) а, б; площадь увеличится в k раз. **241.** $S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$. **242.** а) $\int_{-3}^{0} (4 - (x+1)^2)\,dx$; г) $\int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx$. **244.** а) $\int_0^2 (2^x - 2x + x^2)dx$; б) $2\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$; в) $\int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)dx$. **245.** а) $\int_{-1}^{0} (x + 1)dx + \int_0^{0,5\pi} \cos x\,dx$; б) $2\int_0^2 \left(\frac{8}{x^3+4} - \frac{x^2}{6}\right)dx$; в) $2\int_0^1 (1 - x^2)dx$. **246.** а) $2\int_0^1 (1 - x^2)dx$; б) $\int_{-3}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$; г) $\int_{-1}^{2} (\sqrt{18 - x} - 2^x)\,dx$. **247.** 1) а) $\int_0^{0,5\pi} \pi\sin^2 x dx$; б) $\int_0^4 \pi x dx - \int_0^4 \frac{\pi x^4}{64}\,dx$; 2) а) $\int_0^1 \pi \arcsin^2 y dy$; б) $\int_0^2 8\pi x\,dx - \int_0^2 \pi x^4\,dx$. **248.** $\int_0^h (P_0 + + \rho g x)\frac{a(h-x)}{h}\,dx$, где $P_0 \approx 10^5$ Па — атмосферное давление, $\rho \approx 1000$ кг/м^3 плотность воды, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 ускорение свободного падения. **249.** $\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2\,dx$.

П. 13

250. б, в, г, д является на $D(F)$. **251.** а) Для q; б) для q; в) для g. **252.** $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ 1 + 2x\sin\frac{5}{x} - 5\cos\frac{5}{x} \text{ при } x \neq 0 \end{cases}$

255. а) $F(x) = 2 - \frac{\cos 2x}{2}$; б) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}$; в) $F(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}e^{-3x}$; г) $2 - \sin x - \cos x$; д) $\frac{1}{3}x^3 - 3\ln(-x) + 4\frac{1}{3}$; е) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x - \frac{2}{3}$, при $0 < x < \frac{\pi}{3}$. **257.** а) 9; б) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}$; д) 14; е) 11. **258.** а) $\frac{9}{2}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $1 - \frac{\pi}{4}$; г) 4. **259.** $F(x) =$

$= \begin{cases} 0{,}5x^2 + C \text{ при } x \geqslant 0, \\ -0{,}5x^2 + C \text{ при } x < 0 \end{cases}$ или $F(x) = 0{,}5x|x| + C$. **260.** а) Верно; б) неверно; в) верно. **261.** а) $F(x) = x^3 + \frac{x^4}{4} + C$; в) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x + C$ на любом из промежутков $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $F(x) = 0{,}5x + 0{,}25\sin 2x + C$. **262.** б) $\ln(3 - x) + \frac{x^2}{4} - x - 10$. **263.** $f(x) = \begin{cases} x^{-1} + 5 \text{ при } x < 0, \\ x^{-1} + C \text{ при } x > 0 \end{cases}$ или $f(x) = \begin{cases} x^{-1} + 5 \text{ при } x < 0, \\ C_1 \text{ при } x = 0, \\ x^{-1} + C_2 \text{ при } x > 0, \end{cases}$ где C, C_1 и C_2 — любые числа. **264.** а) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{x} - 41 \text{ при } x > 0, \\ \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{x} - C_1 \text{ при } x < 0, \\ C_2 \text{ при } x = 0 \end{cases}$ или $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{x} - 41 \text{ при } x > 0, \\ \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{x} - C \text{ при } x < 0. \end{cases}$ **265.** а) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{9}{2}$; б) $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{3}$ или $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 2\frac{1}{3}$. **266.** 1) а) $a = 1$, $b = 6{,}25$; б) $(-1{,}5;\ 4{,}75)$ и $(1{,}5;\ 7{,}75)$; в) $\frac{9}{4}$; 2) а) $a = -2$, $b = -\frac{21}{4}$; б) $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{4}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{17}{4}\right)$; в) $\frac{9}{4}$. **267.** б) 2,25. **268.** $16\frac{1}{8}$ и $5\frac{5}{24}$. **269.** $k = 2$. **270.** б) Наименьшее значение равно $-\frac{4}{3}$, наибольшего значения нет. **273.** а) 200 м; $s_1 - s_2 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)\,dt - \int_0^5 (4t + 5)\,dt$. **274.** 14 Дж. **275.** б) $\approx 0{,}64k$. **276.** а) $\frac{256\pi}{3}$; в) $\frac{1024\pi}{5}$; г) 8π; д) $0{,}3\pi$; е) $9{,}6\pi$. **279.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}l^3$. **280.** $H = \frac{4}{3}R$, $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. **281.** $\frac{p^3\pi}{12}$. **282.** $\sqrt{2}$. **283.** 340 м. **284.** $\approx 1{,}2 \cdot 10^7$ Н.

П. 14

286. д) $-\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; и) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$ и $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **287.** а) $1 \pm \sqrt{6}$; б) 1 и -6; д) 1,2 и 2,4; е) 35; 0; $2\log_3 5$; ж) $\frac{\pi}{5}n$, $\frac{\pi(2n+1)}{6}$, $n \in Z$; з) $\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **288.** а) 3; б) $x = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}+\pi k$, $k \in Z$; в) 1; 2; д) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$; е) [5; 10]; ж) $\log_2(\pi + 2\pi k) - 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; и) $\frac{1}{9}$; 1; 3; к) 3 и -5; л) -2 и 6. **289.** а) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $x > 0$; в) $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \sqrt{125})$; г) $0{,}01 < x < 10$. **290.** а) 5; $-\frac{1}{2}$ и -3; б) -2; $\frac{1}{3}$; 1; 3; в) -2; г) -2; д) -2; е) -1; ж) 2; з) 3; и) 3; к) 0. **291.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; б) корней нет; в) 0; г) 1; д) корней нет; е) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **292.** а) $x \neq 0$; б) все действительные числа; в) нет решений; г) все действительные числа; д) $x \geqslant 2$; е) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n > 6$, $n \in Z$. **293.** а) $-2{,}5$; -2; 0,5 и 1; б) -4 и 2; в) 0; г) 4; д) -1 и 1; е) -2; -1; 1; 2; ж) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$; з) $\pi n \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$. **294.** б) $\frac{4}{3}$; πn, $n \in Z$; в) 0; г) 0,001, 10; д) 2; з) 16. **295.** б) 3; в) 1; г) 1; е) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$ и при этом $n < 2$, $2\pi n$, $n \in N$ и при этом $n > 2$; к) $\pm 0{,}3 + \pi n$, $n \in Z$; л) $\cos\frac{2\pi k}{7}$, $k = 1, 2, 3$ и $\cos\frac{\pi(2k+1)}{9}$, $k = 0, 1, 2, 3$; м) $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ и $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; н) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

П. 15

297. а) $\left(-\frac{10}{7}; \frac{19}{7}\right)$; б) (1; 2). **298.** а) (3; 2); б) (3; -2); г) (1; 2; -3); д) (2; 3) и (-3; -2); е) (7; -3) и (-7; 3). **299.** $P(3) = 0$. **300.** а) $\left(\frac{\pi}{2}(m+n); \frac{\pi}{2}(m-n)\right)$, $m, n \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{13}(2k+6n); \frac{\pi}{13}(3k-4n)\right)$, k, $n \in Z$. **301.** а) (1; -3). **302.** а) (5; 3); б) (1; 2); в) (0; 0), $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; г) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pi(2n+1); \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n, k \in Z$; д) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. **303.** а) (2; 6) и (0,5; 10); б) (4; 16); в) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$ и $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n, k \in Z$;

г) $(\operatorname{arctg}(2 + 0{,}8\sqrt{5}) + \pi m;\ \operatorname{arctg}(2 - 0{,}8\sqrt{5}) + \pi n)$ и $(\operatorname{arctg}(2 + 0{,}8\sqrt{5}) + \pi m;\ \operatorname{arctg}(2 + 0{,}8\sqrt{5}) + \pi n)$, $m,\ n \in \mathbf{Z}$; д) $(2;\ 2)$; е) $(3;\ 2)$; ж) $(41;\ 40)$; з) $(12;\ 4)$ и $(34;\ -30)$. **304.** а) $(5;\ -1)$ и $(-5;\ 1)$; б) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$ и $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $k,\ n \in \mathbf{Z}$. **305.** а) $(3;\ 4)$ и $(4;\ 3)$; б) $(1;\ 4)$, $(4;\ 1)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; г) $(4;\ 9)$ и $(9;\ 4)$; д) $(4;\ 1)$ и $(1;\ 4)$; е) $(1;\ 2)$ и $(2;\ 1)$. **306.** а) 6; б) нет решений; в) 3 и 7; г) 2 и 6; д) 7; е) 0; з) ± 40. **307.** б) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(\frac{8\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1};\ \frac{8}{\sqrt{10}+1}\right)$; г) $(100;\ 10)$; $(0{,}1;\ 0{,}01)$; д) $(8;\ 8)$; е) $\left(\frac{\pi}{6}(6k \pm 1);\ \frac{\pi}{4}(4n \pm 1)\right)$, n и k — числа одной четности; ж) $\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ 2\pi n\right)$, $k,\ n \in \mathbf{Z}$; к) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{1}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; н) $(12;\ 12)$; о) $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $y_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$; $x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $y_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k,\ n \in \mathbf{Z}$.

П. 16

309. а) $a = 2$; б) $a = \frac{1}{2}$. **310.** а) Если $a \neq -4$ и $a \neq 3$, $x = \frac{a+1}{a+4}$; если $a = -4$, решений нет; если $a = 3$, любое действительное число; б) если $a \neq 1$ и $a \neq 3$, $x = \frac{a-5}{a-3}$, если $a = 3$, решений нет; если $a = 1$, любое действительное число. **311.** 1) $b = -\frac{157}{42}$; 2) $a = 0$. **312.** $S = 2d$ при $d \in (0;\ 3]$, $S = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-d)}$, где $p = 0{,}5\,(9 + d)$ при $d \in (3;\ \sqrt{41})$, $S = 10$ при $d \in [\sqrt{41};\ +\infty)$. **313.** 1) б) $a = 1$, $a = \frac{7}{3}$; в) $a = -0{,}5$; г) $a = -1$; 2) $-\frac{4}{3} < a < 0$. **315.** а) $a \in \left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right] \cup (5;\ +\infty)$; б) $a \in \left(\frac{2}{3};\ 5\right)$. **320.** а) При $m \geqslant 1$ корней нет; при $m < 1$, $x = \frac{1 - m \pm 2\sqrt{1-m}}{m-1}$; б) корней нет при $m = 1$, $m = \frac{9}{4}$ и $m = -\frac{2}{5}$; единственный корень $x = \frac{31-2m}{4m-9}$ при

$m \neq 1$, $m \neq \frac{9}{4}$ и $m \neq -\frac{2}{5}$; $m = 1$ не является допустимым. **321.** $a = 1$. **322.** а) $\left(-\infty;\ \frac{a(a+2)}{2a+3}\right)$ при $a \in (-\infty;\ -2) \cup \left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; $\left(\frac{a(a+2)}{2a+3};\ +\infty\right)$ при $a \in \left(-2;\ -\frac{3}{2}\right)$; нет решений при $a = \frac{-3}{2}$; б) $\left[\frac{2a(a-4)}{3a-13};\ +\infty\right)$ при $a \in \left(4;\ \frac{13}{3}\right)$; $\left(-\infty;\ \frac{2a(a-4)}{3a-13}\right]$ при $a \in (-\infty;\ 4) \cup \left(\frac{13}{3};\ +\infty\right)$; $(-\infty;\ +\infty)$ при $a = \frac{13}{3}$. **323.** а) 2; б) ± 2. **324.** а) $\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < 0$, $0 < a < \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$; б) $a < \frac{7}{8}$. **326.** а) $a > 4$; б) 1 и 4; в) $a \leqslant 0$, $a = 1$. **328.** а) $a \in (-1;\ 0)$; б) $a \leqslant 0$, $a = \frac{1}{4}$. **329.** а) При $a = 3$ единственный корень; при $2 < a < 3$ два корня; в остальных случаях корней нет; б) при $a = 3{,}5$ единственный корень; при $3{,}5 < a < 5$ два корня; в остальных случаях корней нет. **330.** а) $b < -2$; б) $-2 < b < 0$. **331.** Таких значений d нет. **332.** а) $|b| \leqslant \frac{3}{4}$; б) $a = -\sqrt[3]{48}$, $a \leqslant -4$, $a > 1$. **333.** $t > 2{,}5$. **334.** $c \leqslant 0$, $c \geqslant \frac{2}{3}$. **335.** а) $2\sqrt{2} < a \leqslant 3$; б) $a < -\frac{1}{4}$, $a = 2$, $5 < a \leqslant 6$. **336.** $-2 < a < 0$. **337.** $|a| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$. **338.** $m \in \left[-\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5});\ -4 + 2\sqrt{3}\right]$. **339.** а) 1; 5 и 9; б) $(-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{7}{3};\ +\infty\right)$. **341.** а) $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$, $\frac{a}{2}$ при $a \geqslant -\frac{1}{4}$; $\frac{a}{2}$ при $a < -\frac{1}{4}$; б) корней нет при $a < -\frac{1}{4}$; один корень $-\frac{1}{2}$ при $a = -\frac{1}{4}$, два корня $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ при $-\frac{1}{4} < a < 0$, два корня 0 и -1 при $a = 0$, четыре корня $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ и $\pm\sqrt{2a}$ при $a > 0$. **342.** а) $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$; б) $\sqrt{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **343.** а) $a \leqslant \frac{1}{2}$. **347.** а) Если $c \in \left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$, то $x = \pm \arccos \frac{4c+1}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; если $c \in (-\infty;\ -1) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ —

решений нет; б) $b \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{b-3} + \pi k$, $k \in Z$; если $b = -3$, то x любое действительное число; если $b \in (2; 4)$, решений нет; в) при $a = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; при $a \neq 1$ решений нет; г) при $a = 0$ $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; при $a \neq 0$ решений нет. **348.** $|a| \geqslant 3\sqrt{3}$. **349.** а) Ни при каких a; б) $a \leqslant 0$, $a = 0{,}5$, $a > 1$; в) $a = 1$; г) $0 < a < 0{,}5$, $0{,}5 < a < 1$. **350.** а) $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; б) $a < -\frac{1}{2}$, $a \geqslant 0$; в) $a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; г) $a = \pi s$, где s — иррациональное число. **351.** а) $a = b = -2$; б) $a = b = \pm 1$.

П. 17

352. а) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}$; в) 4; г) 4. **354.** $AB \approx 3{,}14$.

П. 18

355. а) $-5 \pm i$; б) $7 \pm 5i$; в) $\frac{1}{3} \pm \frac{2i}{3}$; г) $\frac{5}{4} \pm \frac{i\sqrt{7}}{4}$. **356.** а) $x_1 = 1$, $(x-1)(x^2+2x+3) = 0$, $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$; б) $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$; в) 1, $\frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}$; г) 2, $\frac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}$; д) 3, $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{4}$. **357.** а) $x^2 - 2x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 25 = 0$. **358.** а) $-7 + 9i$; б) $24 + 2i$; в) $1 + i$; г) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$; д) $-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$; е) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. **359.** а) Числа сопряженные; б) равные коэффициенты при мнимых частях; в) частные от деления действительных частей на коэффициенты при мнимых частях отличаются только знаком или оба числа действительные, или одно из них равно нулю; г) частные от деления действительных частей на коэффициенты при мнимых частях равны или оба числа действительные, неравные нулю, или делимое равно нулю, а делитель нет. **360.** а) $-2 + 5i$; б) -10; в) 3; г) 2,8. **361.** а) $a = 2$, $b = -3$; б) $a = 7\frac{7}{13}$, $b = 4\frac{9}{13}$; в) $a = 3$, $b = 2$

или $a=-3$, $b=-2$. **362.** а) $a=-0{,}3$; $b=-\frac{29}{3}$; б) $a=-\frac{5}{4}$; $b=4$. **363.** а) $x=2$, $y=1$ или $x=-2$, $y=1$; б) $x=-1$, $y=2$ или $x=1$, $y=-2$.

П. 19

365. A: $6+6i$, $r=6\sqrt{2}$; B: $-6+4i$, $r=\sqrt{52}$; C: $-3-4i$, $r=5$; D: $3-4i$, $r=5$. **369.** а) Левая координатная полуплоскость без оси ординат; б) верхняя координатная полуплоскость с осью абсцисс; в) круг радиуса 2 с центром в точке $(-1;\ -2)$ с выколотым центром.

П. 20

374. а) $5(\cos 0° + i\sin 0°)$; б) $2(\cos(-90°) + i\sin(-90°))$; д) $2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$; ж) $3\sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)$; к) $\cos 120° + i\sin 120°$; м) $2(\cos 210° + i\sin 210°)$. **375.** A: $6\sqrt{2}\times \times\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; B: $\sqrt{52}\left(\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)\right)$; C: $5\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$; D: $5\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+ +i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$. **376.** а) $\operatorname{arctg} 2$; б) $\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$; г) $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **377.** а) $\sqrt{3}+i$; б) $1-i$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$; г) $1{,}8-2{,}4i$. **378.** а) $6i$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$. **380.** а) ≈ 1; б) $\approx -0{,}84$; в) $\approx -0{,}376$. **383.** 0. **384.** 0; i; $-i$. **385.** а) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$; б) $\sqrt[3]{2}(\cos\varphi + +i\sin\varphi)$, где $\varphi=-10°, 110°, -130°$; в) $\sqrt[8]{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\varphi= =-33{,}75°, 56{,}25°, 146{,}25°, 236{,}25°$; д) $\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi=30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°$. **386.** а) $\sqrt[3]{4}(\cos(20°+120°\cdot n)+ +i\sin(20°+120°\cdot n))$, где $n=0;\ 1;\ 2$; б) $z_{1,\ldots,6}=\cos(25°+ +60°\cdot n)+i\sin(25°+60°\cdot n)$, где $n=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$. **387.** а) -2; $1-i$; $1+i$; б) 3; $-1-i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$.

Советы

П. 1

2. На концах отрезка многочлен принимает значения разных знаков. Найдите его знак в середине отрезка и определите, в какой из половин содержится корень. Эту половину снова разделите пополам и т. д. пока не получится отрезок с длиной, меньшей 0,01. Середина этого отрезка (с округлением до сотых) и будет искомым приближением. **5, 6.** О преобразованиях графиков прочитайте в учебнике 10 класса. **7.** Сравните области определения функций, заданных аналитически и графически. **8.** Сравните области определения этих двух функций. **12.** Модуль разности двух чисел показывает, на каком расстоянии друг от друга числа расположены на числовой прямой. **15.** Для любого положительного ε укажите положительное δ, так чтобы $\sqrt{\delta} < \varepsilon$. **19.** Достаточно взять $\varepsilon = 0{,}5$. **20.** Для любого ε можно взять δ таким, что в δ-окрестности иррациональной точки останутся только дроби со знаменателями большими, чем $\frac{1}{\varepsilon}$.

П. 2

22. Доказательство аналогично приведенному в п. 1 доказательству непрерывности. **25.** е) Преобразуйте числитель и знаменатель в произведения и сократите дробь. **26.** г) Постройте график. **30.** Воспользуйтесь непрерывностью слева и справа. **32.** 2) а) Для любого значения функции $f(x)$ можно указать число a, бóльшее $f(x)$; б) поскольку a можно брать как угодно большим по модулю отрицательным числом, среди значений функции должны быть числа еще меньшие (получили определение функции, не являющейся ограниченной снизу); 3) для любого числа a должно существовать большее его значение функции. **33.** Попробуйте дать графическую интерпретацию.

П. 3

40. 1) г) Внесите x под знак корня. **41.** в), г) Проще всего разделить числитель на знаменатель в столбик. **42.** 2) Не забудьте, что обозначение $\lim = \infty$ используется в случае, когда предела нет. **48.** а) К функции $|x|$ прибавили что-то, что при $x \to \infty$ стремится к нулю, а при $x \to 0$ стремится к бесконечности, оставаясь все время положительным; б) правую ветвь хорошо знакомого графика подняли на 1, а левую опустили на 1. **50.** 2) Члены последовательности с достаточно большими номерами близки к b.

П. 4

51. Используйте транспортир и линейку. **54.** 2) Угловые коэффициенты считайте, используя клетки тетради. **55.** а) Найдите угловой коэффициент как предел или воспользуйтесь результатом примера 1 с учетом симметрии графика относительно оси ординат и сдвига; б) найдите угловой коэффициент как предел или используйте графические соображения, поскольку речь идет о вершине параболы. **57.** Напишите уравнение касательной с абсциссой точки касания x_0 в общем виде и подставьте в него координаты данной точки. **58.** Найдите угловой коэффициент в общем виде, а затем приравняйте его данному числу. **59.** Поскольку угол между касательными равен разности их углов наклона, воспользуйтесь формулой тангенса разности двух углов. **61.** Углы наклона касательных отличаются на $90°$: $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right) = -\operatorname{ctg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$, т. е. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. **62.** Касательная к параболе имеет с ней единственную общую точку, значит, дискриминанты соответствующих уравнений равны нулю.

П. 5

67. Дифференцируемая функция может чередовать свои промежутки возрастания и убывания, в то время как ее график будет стремиться к слиянию с асимптотой. Представьте себе, что он как бы наматывается на асимптоту. **68.** На отдельных промежутках данные графики прямолинейны — производная на них постоянна. **69.** Воспользуйтесь графическими соображениями о расположении касательных к графику функции в точках с противоположными абсциссами. **77.** г) Произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно −1. **82.** Воспользуйтесь результатами примера 1 данного пункта. **83, 84.** Скорость изменения — это производная. **86.** Вы, конечно, помните формулу кинетической энергии: $E = \frac{mv^2}{2}$.

П. 6

94. Некоторые из графиков имеют изломы, в которых касательных к нему нет. **95.** Полезно вначале очертить на координатной плоскости прямоугольник, в котором расположен искомый график. **96.** Можно воспользоваться знанием того, как выглядят графики данных функций. **99.** Из равенства значений функции следует равенство значений аргумента и обратно, значит, функция обратима. Можно взять, например, любую монотонную функцию. **100.** Используйте идеи симметрии и сдвига. **101.** Воспользуйтесь тем, что число ненулевых точек экстремума четно, если множество точек экстремума конечно.

П. 7

110. Приложите линейку вместо оси абсцисс к графику на рисунке 64 и считайте число точек пересечения с графиком в зависимости от ее положения. **111, 112.** Изобразите эскиз графика. **113.** Воспользуйтесь теоремой Лагранжа, или рассмотрите касательную в точке, наиболее удаленной от оси абсцисс, между двумя нулями функции. **116.** Раскройте скобки. **126.** в, г, д) Не забудьте проверить, нет ли у графика наклонной асимптоты. **129.** Используйте формулу производной произведения двух функций, представив: $uvw = u(vw)$.

П. 8

138. Угловой коэффициент общей касательной можно найти как значения производных первой и второй из данных функций и как угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — точки касания. **140, 141.** г), д), е) Поступайте также, как в примере 2. **143.** Не забудьте об асимптотах.

П. 9

144. 1) г) Используйте формулу косинуса двойного угла; 2) г) умножьте и разделите числитель и знаменатель дроби на $9x$ и представьте его в виде произведения; 3) а) представьте выражение под знаком предела как квадрат; б) сделав замену переменных $y = \frac{1}{x}$ получим нужный предел; в) введите новую переменную $y = \frac{x}{m}$ и поступайте, как в а). **147.** Масса цезия-135 в результате радиоактивного распада изменяется по закону $m(t) = m_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{31}}\right)^t$. Примите начальную массу цезия за 1, а время измеряйте в годах. **150.** Представьте выражение $\log_t (t + 1)$ как частное натуральных логарифмов. **156.** б), г). В некоторых точках производная обращается в нуль. Покажите, что они являются точками возрастания. **158.** Как уже говорилось, в нуле производные этих функций равны 1. **161.** а), б) можно перейти к двойному углу, тогда не нужно будет искать производные и приравнивать их нулю; в) можно воспользоваться четностью и убыванием данной функции при $x \geqslant 0$. **162.** По данной производной можно найти бесконечно много функций, отличающихся на константу. Выберите наиболее простую, поменяйте местами x и y, и выразите y через x. **163.** Не забывайте об области определения и там, где возможно, вместо дифференцирования используйте свойство монотонности сложной функции. **166.** В точках, где производная стремится к бесконечности. **168.** Достаточно показать, что производная функции во всех точках промежутка равна нулю. **173.** Площадь такого треугольника равна модулю полупроизведения абсциссы и ординаты точек пересечения касательной с осями координат. **174.** Подумайте, чему должен быть равен угловой коэффициент такой касательной, и не забудьте, что речь идет о положительных полуосях. **180.** 1) Чтобы найти производную в нуле, подумайте о том, как ведет себя секущая; 2) посмотрите, что происходит со знаком производной, когда x приближается к нулю.

П. 10

182. В а), в) и ж) постарайтесь дать ответ без дифференцирования. **183, 184.** Сделайте эскиз графика. **185.** а) Речь идет о наименьшем значении суммы взаимно обратных величин; б) не забудьте, что косинус по модулю не больше 1. **187.** а) Как 185 а); б) придется дифференцировать; в) надо увидеть квадратный трехчлен. **188.** Одно из чисел, конечно, x. **190.** Можно написать уравнение прямой, проходящей через данную точку, найти ее пересечения с осями координат и выразить площадь треугольника как функцию углового коэффициента этой прямой, можно использовать и геометрические знания. Подумайте, как через точку внутри угла провести прямую, которая отсекает от угла треугольник наименьшей площади. **193.** Здесь нет необходимости использовать производную. Сначала покажите, что из всех треугольников с данным основанием наибольшая высота у равнобедренного, а затем возьмите боковую сторону за новое основание и повторите рассуждение. В каком случае второго увеличения не произойдет? **197.** Если две стороны треугольника даны, наибольшая площадь будет, когда они являются катетами. **198.** Замените полученный треугольник более простым равновеликим треугольником. **199.** Нужно взять максимальными длины двух сторон и сделать их катетами. При этом, правда, длина третьей стороны должна позволить ей стать гипотенузой. **201.** За x обычно принимают величину, которая возводится в квадрат, — в данных случаях это радиус основания цилиндра. **202.** б) Преобразуйте $y(x)$ к виду $y = x + |x + 3|\,|x + 1| = x - (x + 1)|x + 3|$ $\left(x + 1 < 0\right.$ при $\left.-4 \leqslant x \leqslant -\frac{5}{4}\right)$. **203.** Соотношение между числами такое же, как и между их логарифмами. Прологарифмируйте и сравните значения одной и той же функции при $x = e$ и при $x = \pi$. **204.** а) Покажите, что искомый случай соответствует наименьшему модулю разности между точками с одной и той же абсциссой; б, в) если точки ближайшие друг к другу, то касательные в них параллельны между собой. Используйте симметрию графиков. **209.** Полезно знать, что свое наибольшее значение произведение положительных величин с фиксированной суммой имеет в случае равенства величин. Тогда можно решить задачу без производной. Впрочем, поскольку площадь выразится квадратным трехчленом, использовать производную все равно не рационально. **213.** Подумайте, как выразить длину судна, когда оно касается бортом угла канала. **214.** Как и в 213, но потом, добавив третье измерение, найдите как диагональ параллелограмма.

П. 11

221. Среднее арифметическое значений на концах меньше, чем в середине промежутка выпуклости, и больше, чем в середине промежутка вогнутости. **224.** Выяснить характер поведения функции в критической точке поможет вторая производная. **225.** Ваши предыдущие встречи (180 из п. 9) с этой функцией показали, что ее производная в нуле разрывна. **231, 233, 235.** Мы говорили о И. Ньютоне как о создателе математического анализа, а здесь придется вспомнить о его знаменитом физическом законе $F = ma$.

П. 12

240. В отличие от обычной трапеции, фигура является криволинейной трапецией, если она определенным образом расположена относительно осей координат. **241.** Нарезав фигуру на вертикальные полоски равной толщины, заменяем каждую прямоугольником с основанием Δx и высотой $f(x) - g(x)$. Далее рассуждаем, как в случае криволинейной трапеции. **247.** 2) Переименуйте оси и переменные, после чего примените формулу объема тела вращения. Собственно, все сводится к замене ограничивающих функций обратными им.

П. 13

252. Собственно, это та же задача, что и 180 из пункта 9. **255**$^{\circ}$. е) Не забудьте указать промежуток, на котором определена искомая первообразная. **257.** д), е) Вспомните, какое преобразование связано с переходом к модулю аргумента. **260.** Не забудьте, что от вертикального сдвига графика функция не теряет звания первообразной. **261.** г) Формулы такой нет, но можно понизить степень косинуса. **263.** Проблема, конечно, в области определения первообразной, поскольку область определения функции, имеющей данную производную, не обязательно является промежутком. **266.** Поскольку соответствующие параболы получаются одна из другой параллельным переносом, их общая касательная должна быть параллельна прямой, соединяющей их вершины. **270.** После применения формулы Ньютона—Лейбница получится функция с аргументом a. Ее наименьшее и наибольшее значения и надо найти. **273.** а) Расстояние между точками — первообразная от разности их скоростей, значение которой при $t = 0$ нуль. **284.** Давление воды пропорционально высоте ее столба, нужно учесть атмосферное давление. **285.** Работа по укладке блока пирамиды пропорциональна высоте, на которую его подняли.

П. 14

288. ж) Сделайте замену $2^x = b$ и используйте формулу $tg^2\,\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$. **293.** е) Сделайте замену переменных $2^x - 2^{-x} = y$; ж) раскройте скобки и введите новую переменную $t = \sin 2x$.

П. 15

301. в) Перейдите к сумме и разности уравнений, затем примените формулы синуса суммы и разности аргументов; г) перейдите к сумме и разности уравнений. **303.** д) Сделайте замену переменных $3^x = a$, $2^{\frac{y}{2}} = b$; е) сделайте замену переменных $2^x = a$, $3^y = b$; з) сделайте замену $\sqrt{x + y} = u$, $\sqrt[3]{x - y} = v$. **307.** е) Возведите уравнения системы в квадрат; к) сделайте замену переменных $u = \sin x$, $v = \log_y 3$; м) представьте первое уравнение в виде $\sin \frac{x}{2} - x = \sin \frac{y}{2} - y$ и исследуйте на монотонность функцию $f(z) = \sin \frac{z}{2} - z$.

П. 16

312. Будем постепенно увеличивать длину стороны c от нуля до $+\infty$. Рассмотрим сначала треугольник со сторонами 4 и c, затем со сторонами 4, 5 и c, и, наконец, со сторонами 4 и 5. Наибольшую площадь при данных длинах двух своих сторон имеет треугольник, у которого эти стороны являются катетами. Однако при этом третья сторона должна оказаться гипотенузой. **313.** Подставьте число 2 вместо x. **315.** Из рассмотрения исключается значение a, при котором уравнение теряет смысл. а) Правая часть уравнения должна быть неположительной; б) правая часть должна быть больше 1. **316.** Ответ на этот вопрос зависит от величины коэффициента при старшем члене. **321.** Уравнение должно иметь два корня, сумма которых равна a. **336.** Точка пересечения парабол должна находиться ниже оси абсцисс. **337.** Корни второго уравнения расположены между корнями первого. **338.** Подумайте, какими должны быть значения трехчлена при $x = 1$ и при $x = 2$. **339.** б), в) Попробуйте решить графически. **340.** Один из экстремумов должен быть равен нулю. а) Отнеситесь к параметру как к переменной; б) рассмотрите уравнение как квадратное относительно a. **341.** Рассмотрите уравнение как квадратное относительно a. **343.** Изобразите множество решений системы на координатной плоскости: а) aOx; б) pOx. **349.** Подумайте, что можно сказать о значениях переменных в случае единственного решения.

П. 17

353. Замените: а) $x = y - 3$; б) $x = y + 2$.

П. 18

364. б) Обратите внимание на значение суммы первых четырех слагаемых, вторых четырех слагаемых и т. д., или используйте формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии.

П. 19

367. В заданиях а) и б) искомые точки равноудалены от точек в а) $(1; 0)$ и $(-1; 0)$, а в б) от $(-1; i)$ и $(1; -i)$. В заданиях в) и г) следует заменить z на $x + yi$. В заданиях д) и е) должно получиться геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до двух данных точек равно некоторому числу (в д) $2 : 1$, в е) $1 : 3$). Это окружность Аполлония. Можно получить ее уравнение, заменив z на $x + yi$. **368.** Найдите отдельно левую и правую части равенства. **370.** Точка с искомыми координатами — это точка пересечения серединных перпендикуляров к соответствующим отрезкам. Ее можно найти построением. **371.** Найдите наиболее удаленную от начала координат точку окружности с радиусом 1 и центром $(-1; -1)$. **372.** в) Найдите ближайшую к началу координат точку окружности с радиусом 3 и центром $(-1; -1)$. **373.** Наиболее удаленная от начала координат точка, координаты которой удовлетворяют первому уравнению системы, отстоит от начала координат меньше, чем на 3.

Решения

П. 1

15. Для любого положительного ε, взяв $\delta = \varepsilon^2$, получим: $0 < x < \delta \Leftrightarrow 0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon$, что, поскольку $\sqrt{0} = 0$, и требовалось доказать.

20. Разрывность данной функции в рациональной точке $x_0 = \frac{p}{q}$ (несократимая дробь) доказывается выбором $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. В любой окрестности точки x_0 есть нули функции, для которых не будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$: $\left|0 - \frac{1}{q}\right| > \frac{1}{2q}$. Если x_0 иррационально, для любого $\varepsilon > 0$ выберем δ так, чтобы в δ-окрестности точки x_0 остались несократимые дроби только со знаменателем, большим, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда для любого рационального значения x имеем: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{q} - 0\right| = \left|\frac{1}{q}\right| < \left|\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}\right| = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

П. 2

22. б) Для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ нужно найти такое число δ, чтобы из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следовало неравенство $|(0{,}5x + 2) - 4| < \varepsilon$. Преобразуем $|(0{,}5x + 2) - - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |0{,}5x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|0{,}5x - 2| < 2\varepsilon \Leftrightarrow |x - 4| < 2\varepsilon$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = 2\varepsilon$ из неравенства $0 < |x - 4| < \delta$ следует неравенство $|(0{,}5x - 4| < \varepsilon$, что и означает $\lim\limits_{x\to4}(0{,}5x + 2) = 4$.

25. е) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-2\sin 2x \sin x}{2\sin 2x \cos x} = \lim\limits_{x\to0}(-\mathrm{tg}x) = 0.$

П. 3

39. г) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)^5} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^5} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty.$

40. 1) г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}} = \sqrt{1-0} = 1;$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{2}{x^2}} = -1.$$

41. г) $\dfrac{x^5-2x^3+1}{x^4+2x+3} = x - \dfrac{2x^3+2x^2+3x-1}{x^4+2x+3}.$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5-2x^3+1}{x^4+2x+3} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2x^3+2x^2+3x-1}{x^4+2x+3}\right) =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}\right) = \dfrac{0}{1} = 0.$ Прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика данной функции.

П. 4

59. Найдем абсциссу точки пересечения парабол из уравнения: $2x^2 - 3 = 2x^2 - x + 3$, $x = 6$. Найдем угловой коэффициент касательной к параболе $y = 2x^2 - 3$ в точке $x_0 = 6$: $k_1 = \lim\limits_{x\to6}\dfrac{(2x^2-3)-(2\cdot6^2-3)}{x-6} = \lim\limits_{x\to6} 2(x+6) = 2\cdot12 = 24$. Найдем угловой коэффициент касательной к параболе $y = 2x^2 - x + 3$ в точке $x_0 = 6$: $k_2 = \lim\limits_{x\to6}\dfrac{(2x^2-x+3)-(2\cdot6^2-6+3)}{x-6} = \lim\limits_{x\to6}(2x+11) = 23$. Тангенс угла между касательными найдем по формуле тангенса разности углов: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{24-23}{1+24\cdot23} = \dfrac{1}{553}$. Угол между касательными равен $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{553}$.

61. б) Угловой коэффициент данной прямой равен $\dfrac{1}{6}$, значит, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен -6. Найдем угловой коэффициент касательной в точке x_0: $k = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x^2+2x+1)-(x_0^2+2x_0+1)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0+2) = 2x_0+2$. Имеем: $2x_0+2=-6$, $x_0=-4$. Найдем ординату точки касания: $y_0 = (x_0+1)^2 = (-4+1)^2 = 9$. Запишем уравнение искомой касательной: $y = -6(x+4)+9$, $y = -6x-15$.

62. Пусть $M(x_0;\ y_0)$ — точка, удовлетворяющая условию задачи. Тогда уравнение произвольной прямой (не вертикальной), проходящей через M, имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$. Условие означает, что дискриминант уравнения $x^2 - y_0 - k(x - x_0) = 0$ равен 0, т. е. $k^2 - 4kx_0 + 4y_0 = 0$. Для того чтобы существовали две касательные, должно выполняться условие $x_0^2 - y_0 > 0$, т. е. $M(x_0;\ y_0)$ находится ниже данной параболы. Пусть k_1 и k_2 — корни последнего уравнения. Перпендикулярность прямых

с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 означает, что $k_1k_2 = -1$, т. е. по теореме Виета $4y_0 = -1$, $y_0 = -\frac{1}{4}$.

П. 5

71. д) $\Delta y = \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x - 1} - \frac{x}{x - 1} = \frac{x^2 + x\Delta x - x - \Delta x - x^2 - x\Delta x + x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)} =$
$= \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)} =$
$= -\frac{1}{(x - 1)^2}$. е) $\Delta y = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}}{\sqrt{x(x + \Delta x)}} =$
$= \frac{x - x - \Delta x}{\sqrt{x(x + \Delta x)}(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})} = \frac{-\Delta x}{\sqrt{x(x + \Delta x)}(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})}$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x(x + \Delta x)}(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

72. б) $\Delta g = 2(x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)^2 + 2 - 2x^3 + 3x^2 - 2 =$
$= 2\Delta x((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) - 3\Delta x(x + \Delta x + x) = \Delta x(2(3x^2 +$
$+ \Delta x(2x + \Delta x + x)) - 6x - 3\Delta x + x)$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6x^2 - 6x +$
$+ \Delta x(6x + 2\Delta x - 3)) = 6x^2 - 6x$.

85. $S(r) = \pi r^2$, $S'(r) = 2\pi r$. $S(3 - 0{,}02) = S(3) + \Delta S \approx S(3) +$
$+ S'(3)\Delta r = \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot (-0{,}02) = 8{,}88\pi$ (см^2).

П. 7

111. б) Найдем экстремумы функции $y = x^4 + x^3 - 6$: $y' =$
$= 4x^3 + 3x^2 = 4x^2\left(x + \frac{3}{4}\right)$. Критические точки: $x = 0$ и $x = -\frac{3}{4}$.
Свой знак производная меняет при переходе через точку $x = -\frac{3}{4}$.
Знак изменяется с «минуса» на «плюс», значит, в этой точке функция имеет минимум. Этот минимум меньше нуля. Поскольку слева от точки экстремума функция убывает и имеет положительное значение, например, при $x = -10$, то она имеет слева единственный нуль. Справа функция возрастает и имеет

положительное значение, например, при $x = 10$. Значит, справа от точки экстремума функция также имеет единственный нуль. Таким образом, всего у функции два нуля, т. е. данное уравнение имеет два корня.

112. Найдем экстремумы функции $y = 6x^3 - 2x + a$: $y' = 18x^2 - 2$, $y' = 0$ при $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. В точке x_1 функция имеет максимум, равный $a + \frac{4}{9}$, а в точке x_2 — минимум, равный $a - \frac{4}{9}$. а) Один корень будет, когда максимум меньше нуля или когда минимум больше нуля, т. е. нужно решить совокупность двух неравенств: $\left[\begin{array}{l} a + \frac{4}{9} < 0, \\ a - \frac{4}{9} > 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a < -\frac{4}{9}, \\ a > \frac{4}{9}; \end{array}\right.$ $|a| > \frac{4}{9}$; б) два корня будет в случае равенства одного из экстремумов нулю: $|a| = \frac{4}{9}$; в) три корня будет, когда максимум больше и одновременно минимум меньше нуля: $|a| < \frac{4}{9}$.

120. Графики данных функций симметричны относительно точки (0; 1) (рис. 132). Углы, под которыми они пересекаются, тоже симметричны, а значит, равны.

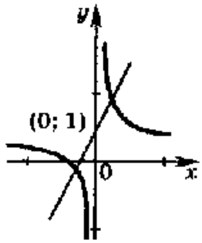


Рис. 132

П. 8

136. 1) а) Найдем критические точки функции.

$y' = ((2x - a)^6 (x + a)^4)' = 12(2x - a)^5 (x + a)^4 + 4(2x - a)^6 \times (x + a)^3 = 4(2x - a)^5 (x + a)^3 (3(x + a) + 2x - a) = 4(2x - a)^5 (x + a)^3 (5x + 2a)$. $y' = 0$ при $x_1 = -a$, $x_2 = -0{,}4a$, $x_3 = 0{,}5a$. При переходе через точки x_1 и x_3 производная изменяет знак с минуса на плюс, значит эти точки — точки минимума. Имеем: $2 = -a$ или $2 = 0{,}5a$. $a = -2$, $a = 4$.

2) в) Найдем критические точки функции.

$y' = ((x - a)^3 (x - 1)^6)' = 3(x - a)^2 (x - 1)^6 + 6(x - a)^3 (x - 1)^5 = 3(x - a)^2 (x - 1)^5 (x - 1 + 2(x - a)) = 3(x - a)^2 (x - 1)^5 (3x - 2a - 1)$. $y' = 0$ при $x_1 = a$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{2a + 1}{3}$. При переходе через точку x_1 производная не изменяет свой знак, даже при $a = 1$. При $a = 1$ получаем $y' = 9(x-1)^8$. Если $x_3 = 2$, то $a = 2{,}5$. При переходе через точку 2 производная $y' = 3(x-2{,}5)^2 \times \times (x-1)^5(3x-6)$ изменяет знак с минуса на плюс, т. е. 2 — точка минимума. Значит, 2 не является точкой максимума ни при каком значении a.

2) г) Найдем критические точки функции.

$y' = ((2x-a)^3 (x+a)^4)' = 6(2x-a)^2 (x+a)^4 + 4(2x-a)^3 \times \times (x+a)^3 = (2x-a)^2 (x+a)^3 (6(x+a) + 4(2x-a)) = 2(2x-a)^2 \times \times (x+a)^3 (7x+a)$. $y' = 0$ при $x_1 = -a$, $x_2 = -\frac{1}{7}a$, $x_3 = 0{,}5a$. Если $x_1 = 2$, то $a = -2$ и $x_3 < x_2 < x_1$. При переходе через точку 2 производная изменяет знак с минуса на плюс, значит, 2 — точка минимума. Если $x_2 = 2$, то $a = -14$ и $x_1 < x_3 < x_2$. При переходе через точку 2 производная изменяет знак с плюса на минус, значит, 2 — точка максимума. Если $x_3 = 2$, то $a = 4$ и $x_1 < x_2 < x_3$. При переходе через точку 2 производная изменяет знак с минуса на плюс, значит, и в этом случае 2 — точка минимума. 2 является точкой максимума при $a = -14$.

138. Р е ш е н и е 1. Выразим угловой коэффициент k касательной через координаты точек касания: $y = x^2$; $y' = 2x$, $k = 2x_1$; $y = 3 - 2(x-6)^2$, $y' = -4(x-6)$, $k = -4(x_2-6)$; $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2(x_2-6)^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$. Имеем $\begin{cases} 2x_1 = -4(x_2 - 6), \\ -4(x_2 - 6) = \dfrac{3 - 2(x_2-6)^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -2(x_2 - 6), \\ -4(x_2 - 6) = \dfrac{3 - 2(x_2-6)^2 - 4(x_2-6)^2}{x_2 + 2(x_2 - 6)}. \end{cases}$ Из второго уравнения находим x_2: $-4(x_2-6)(3x_2-12) = 3 - 6(x_2-6)^2$, $2x_2^2 - 16x_2 + 25 = 0$, $x_2 = 4 + 0{,}5\sqrt{14}$.

$k = -4(4 \pm 0{,}5\sqrt{14} - 6) = -4(-2 \pm 0{,}5\sqrt{14}) = 8 \pm 2\sqrt{14}$.

Р е ш е н и е 2. Соответствующие параболы гомотетичны с коэффициентом гомотетии, равным -2, центр гомотетии A делит отрезок, соединяющий вершины парабол, точки (0; 0) и (6; 3), в отношении 2 : 1 и имеет координаты (4; 2). Обе общие касательные к параболам проходят через их центр гомотетии (рис. 133). Выразим угловой коэффициент касательной двумя способами: $k = 2x$ и $k = \frac{x^2-2}{x-4}$.

Отсюда: $2x = \frac{x^2-2}{x-4}$, $2x^2 - 8x = x^2 - 2$, $x^2 - 8x + 2 = 0$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{14}$, $k = 8 \pm 2\sqrt{14}$.

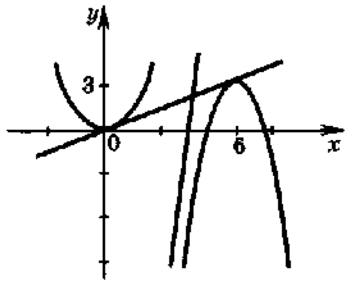


Рис. 133

Р е ш е н и е 3. Пусть уравнение касательной $y = kx + b$, тогда дискриминанты уравнений $x^2 = kx + b$ и $3 - 2(x-6)^2 = kx + b$ должны быть одновременно равны нулю. Имеем $x^2 - kx - b = 0$ и $2x^2 + (k-24)x + b + 69 = 0$,

$$\begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ (k-24)^2 - 4 \cdot 2(b+69) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -4b = k^2, \\ (k-24)^2 + 2k^2 - 552 = 0, \end{cases}$$

$3k^2 - 48k + 576 - 552 = 0$, $k^2 - 16k + 8 = 0$, $k_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{14}$.

139. а) Функция дифференцируема на R. Промежутки возрастания и убывания данной функции, а значит, и ее точки экстремума совпадают с промежутками возрастания, убывания и точками экстремума функции $g = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$. Найдем критические точки функции g: $g' = 6x^2 - 6x - 12$; $g' = 0$: $x^2 - x - 2 = 0$, $x = -1$, $x = 2$. При переходе через точку -1 g' меняет знак с «плюса» на «минус», а при переходе через точку 2 — с «минуса» на «плюс». Значит, -1 — точка максимума, а 2 — точка минимума функций g и y. $y_{\max} = 5^5$, $y_{\min} = -22^5$; б) функция дифференцируема при всех $x \neq -1$. Найдем ее критические точки: $y' = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{2(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$, $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = -3$. При переходе через точку -3 производная меняет знак с «плюса» на «минус», а при переходе через точку 1 — с «минуса» на «плюс». Значит, -3 — точка максимума, а 1 — точка минимума данной функции. $y_{\max} = -2{,}5$; $y_{\min} = 1{,}5$.

140. в) Возьмем производные от обеих частей равенства: $3y^2y' - y'x - y = 0$. Подставим координаты точки A: $3(-2)^2y' - y'(-1) + 2 = 0$. Отсюда $y' = -\frac{2}{13}$.

141. д) Найдем y': $y'(x^2 - 2yx) + y(2x - 2y'x - 2y) = 0$, $y'(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 3 - 2y' \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 0$, $y' = \frac{4}{3}$. Запишем уравнение касательной: $y = \frac{4}{3}(x-3) + 1$, $y = \frac{4}{3}x - 3$; е) найдем

y': $3x^2y + x^3y' - y^2 - 2xyy' = 0$, $3 \cdot 4 + 8y' - 1 - 2 \cdot 2y' = 0$, $y' = \frac{11}{4}$. Запишем уравнение касательной $y = -\frac{11}{4}(x - 2) + 1$, $y = -\frac{11}{4}x + \frac{13}{2}$.

142. Данная функция определена при $x \geqslant 3$. Ее производная $y' = (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+5}}{2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+5}} < 0$ при $x > 3$. В силу непрерывности функция убывает на всей своей области определения.

При $x = 4$ равенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$ верно. Левая часть равенства задает убывающую функцию, значит, других корней, кроме числа 4, у уравнения нет. $x = 4$.

П. 9

144. 1) а) Из того, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ следует, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$. б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{7x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{7x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\sqrt{2} \cdot \frac{|\sin x|}{x}\right) = -\sqrt{2}$;

2) г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 9x}{9x} \cdot \frac{3x \cdot 3\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot 3 = 3$.

3) б) Сделав замену $\frac{1}{x} = y$, получим нужный предел;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{m}}\right)^{\frac{x}{m} \cdot m} = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{m}}\right)^{\frac{x}{m}}\right)^m = e^m$.

149. б) Найдем производную $y' = \left(\frac{x^2}{2^x}\right)' = \frac{2x \cdot 2^x - x^2 2^x \ln 2}{2^{2x}} = \frac{x2^x(2 - x\ln 2)}{2^{2x}}$. $y' = 0$ при $x = 0$ — точка минимума и при

$x = \frac{2}{\ln 2}$ — точка максимума. Функция возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$; в) функция определена при всех значениях x, кроме нуля. $y' = (x^2 - \ln x^2)' = 2x - \frac{2x}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x}$. Функция имеет минимумы в точках $x = -1$ и $x = 1$. Промежутки убывания: $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, промежутки возрастания $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$.

150. Исследуем функцию $y = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ на монотонность: $y' = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$. В числителе дроби — разность значений функции $q = z\ln z$ при $z = x$ и $z = x + 1$. При $z > \frac{1}{e}$ производная этой функции положительна, значит, функция возрастает. Отсюда следует, что разность в числителе при $x > \frac{1}{e}$ отрицательна. Если же $x \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$, то $x + 1 > 1$ и $x\ln x < 0$, $(x+1)\ln(x+1) > 0$, а, значит, разность в числителе снова отрицательна. Следовательно, значения производной функции $y = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ при $0 < x < 1$ и при $x > 1$ отрицательны. Значит, функция на промежутках $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ убывает.

1) Данные числа — значения функции $y = \log_x(x+1)$ соответственно при $x = 9$ и при $x = 10$ и в силу убывания этой функции $\log_9 10 > \log_{10} 11$; 2) $\frac{\ln\log_2 x}{\ln(6-x)} = \frac{\ln(\log_2 x + 1)}{\ln(7-x)}$, $\frac{\ln((6-x)+1)}{\ln(6-x)} = \frac{\ln(\log_2 x + 1)}{\ln\log_2 x}$. Функция $f(t) = \log_t(t+1)$ убывает на $(0; 1)$, где ее значения отрицательны, и на $(1; +\infty)$, где ее значения положительны. Значит, каждое свое значение эта функция принимает по одному разу. Следовательно, $\log_{6-x}((6-x)+1) = \log_{\log_2 x}(\log_2 x + 1) \Rightarrow 6 - x = \log_2 x$, откуда в силу разноименной монотонности частей равенства имеем единственный корень: $x = 4$. Проверкой убеждаемся в его пригодности.

156. б) $y' = (x - \cos x)' = 1 + \sin x$. Во всех точках, кроме $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$, производная непрерывной функции положительна, а в указанных точках она равна нулю. Значение функции в любой из этих точек больше, чем ее значения слева, и меньше, чем ее значения справа. Значит, эту точку можно присоединить и к левому и к правому по отношению к ней промежуткам возрастания (где $y' > 0$). Тем самым эти промежутки «склеятся».

161. г) $y' = 10(x + 1)^9 e^{-x} - (x + 1)^{10} e^{-x} = (x + 1)^9 e^{-x} (9 - x)$. При переходе через точку $x = 9$ производная непрерывной функции изменяет свой знак с «плюса» на «минус», значит, в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, в этой точке у функции минимум.

163. е) Функция $y = \log_{0,5}(2x^2 - 3x - 2)$ определена на $(-\infty; -0,5) \cup (2; +\infty)$. Свое наименьшее значение внутренняя функция принимает при $x = 0,75$, при $x \leqslant 0,75$ она убывает, а при $x \geqslant 0,75$ она возрастает. В силу убывания внешней функции с учетом области определения получаем, что данная функция возрастает на $(-\infty; -0,5)$, а убывает на $(2; +\infty)$.

171. а) При $x = 0$ значения обеих частей неравенства $e^x \geqslant 1 + x$ совпадают. При положительных значениях x производная левой части неравенства больше производной ее правой части: $e^x > 1$, значит, значение левой части растет быстрее, чем правой, и при любом положительном значении x будет строго больше. Таким образом, при всех неотрицательных значениях x данное неравенство верно; б) при $x = 0$ значения обеих частей неравенства $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ совпадают. Сравним производные от обеих частей неравенства при $x > 0$: $e^x > 1 + x$ (по доказанному в задании а). Значение левой части исходного неравенства растет быстрее, чем правой и при любом положительном значении x будет строго больше. Таким образом, при всех неотрицательных значениях x данное неравенство верно. 2) В левой части у всех неравенств стоит e^x, а производная правой части каждого следующего неравенства равна правой части предшествующего. Следующее неравенство будет таким: $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$.

172. Рассмотрим функции $y = \ln(x + 1)$ и $g = \frac{2x}{2 + x}$ при $x \geqslant 0$. На указанном множестве данные функции непрерывны и дифференцируемы. Сравним производные функций y и g при $x > 0$: $(\ln(x+1))' - \left(\frac{2x}{2+x}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2+x)^2} =$ $= \frac{4+4x+x^2-4x-4}{(x+1)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(2+x)^2}$. Поскольку производная функции y больше производной g, то функция y возрастает быстрее. Поскольку $y(0) = g(0)$, то при положительных значениях x имеем $y > g$, т. е. $\ln(x+1) > \frac{2x}{2+x}$, что и требовалось доказать.

173. б) Найдем угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0: $k = -\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}$. Запишем уравнение касательной в этой точке: $y - \sqrt{1-2x_0^2} = -\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}(x - x_0)$. Найдем отрезки, которые касательная отсекает от координатных лучей, при $x = 0$ $y = \frac{2x_0^2}{\sqrt{1-2x_0^2}} + \sqrt{1-2x_0^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2x_0^2}}$; при $y = 0$: $\sqrt{1-2x_0^2} = \frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}}(x - x_0)$, $1 - 2x_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2$, $x = \frac{1}{2x_0}$. Полупроизведение найденных отрезков дает площадь треугольника $S = \frac{1}{\sqrt{2}}: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2x_0^2}} \cdot \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $8(1-2x_0^2)\,x_0^2 = 1$, $16x_0^4 - 8x_0^2 + 1 = 0$, $(4x_0^2-1)^2 = 0$, $x_0^2 = \frac{1}{4}$, $x_0 = \pm 0{,}5$. $y_0 = \sqrt{1-2x_0^2} = \sqrt{1-0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $k = -\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}} = \mp\sqrt{2}$. Уравнения искомых касательных $y = \sqrt{2}(x+0{,}5) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = -\sqrt{2}(x-0{,}5) + \frac{\sqrt{2}}{2}$. После упрощений получаем $y = \sqrt{2}(x+1)$ и $y = -\sqrt{2}(x-1)$.

174. Угловой коэффициент искомых касательных должен быть равен -1. Найдем абсциссы точек графика, касательные в которых имеют угловой коэффициент -1: $x^2 - 4x - 22 = -1$, $x^2 - 4x - 21 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 7$. Касательная проходит через I, II и IV четверти. В I четверти координаты x и y любой ее точки положительны, во II четверти $y > |x|$, а в IV четверти $x > |y|$. Найдем ординаты точек касания: $y_1 = 11$ — II четверть ($y_1 > |x_1|$); $y_2 < -100$ — IV четверть ($x_2 < |y_2|$). Требованию задачи удовлетворяет только первая точка $(-3; 11)$.

180. 2) В любой окрестности точки $x = 0$ имеются интервалы, на которых производная $y' = 1 + 2x \sin \frac{5}{x} - 5\cos \frac{5}{x}$ положительна и интервалы, на которых производная отрицательна, т. е. интервалы возрастания и убывания функции, значит, функция y в окрестности точки $x = 0$ не является монотонной.

П. 10

184. Исследуем данную функцию. $D(y) = R$. Ось абсцисс — горизонтальная асимптота ее графика. Найдем промежутки монотонности и экстремумы:

x	$(-\infty; -\sqrt{6}-1)$	$-\sqrt{6}-1$	$(-\sqrt{6}-1; \sqrt{6}-1)$	$\sqrt{6}-1$	$(\sqrt{6}-1; +\infty)$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

В точке $x = -\sqrt{6} - 1$ функция имеет минимум, значение которого меньше нуля. В точке $x = \sqrt{6} - 1$ функция имеет максимум. Максимум данной функции является ее наибольшим значением (рис. 134). Найдем максимум функции:

$$y_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{6 - 2\sqrt{6} + 1 - 2\sqrt{6} + 2 + 3} = \frac{\sqrt{6}}{12 - 4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4(3 - \sqrt{6})} =$$

$$= \frac{3\sqrt{6} + 6}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6} + 2}{4} < \frac{2,5 + 2}{4} < 1,2.$$

Все значения функции меньше, чем 1,3, значит, данное уравнение не имеет решений и прямая $y = 1,3$ не пересекает график функции $y = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 3}$.

Замечание. Можно рассмотреть уравнение $\frac{x+1}{x^2 - 2x + 3} = 1,3$, освободиться от знаменателя и получить квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом.

190. Пусть прямая BC отсекает от угла треугольник наименьшей площади (рис. 135). Предположим, что $AC > AB$. Повернем эту прямую вокруг точки A на небольшой угол так, чтобы все еще выполнялось неравенство $AC_1 > AB_1$. Заметим, что $S_{BOC} + S_{BAB_1} - S_{CAC_1} = S_{B_1OC_1}$. В силу соотношения сторон, заключающих равные вертикальные углы в треугольниках BAB_1 и CAC_1: $S_{BAB_1} - S_{CAC_1} < 0$. Отсюда $S_{BOC} > S_{B_1OC_1}$, что про-

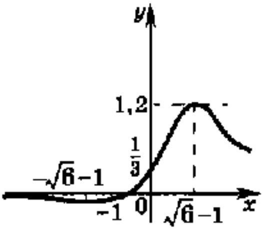


Рис. 134

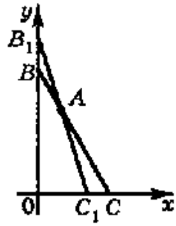


Рис. 135

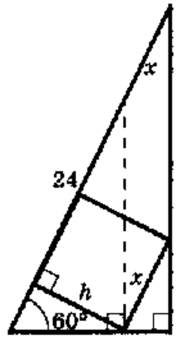


Рис. 136

тиворечит минимальности площади треугольника BOC. К этому противоречию нас привело предположение о том, что точка A делит отрезок BC на неравные части. Значит, точка A должна быть серединой отрезка BC. Это позволяет найти координаты точек B и C: $B(0;\ 6)$, $C(4;\ 0)$ и записать уравнение прямой BC: $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, $y = -1{,}5x + 6$.

196. Обозначим основание прямоугольника буквой x, а его высоту — h. Сделаем рисунок (рис. 136). $h = \frac{24 - x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Выразим площадь S прямоугольника как функцию x: $S = x \cdot \frac{24 - x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(24x - x^2)$. Наибольшее значение S принимает при $x = 12$. Отсюда $h = 3\sqrt{3}$. Стороны искомого прямоугольника 12 см и $3\sqrt{3}$ см.

199. Площадь треугольника $S = 0{,}5ab\sin\alpha$ со сторонами $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$ будет наибольшей, когда стороны равны 4 и 5, а угол между ними прямой. В этом случае третья сторона треугольника $c = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} < 7$, что удовлетворяет условию. Искомая площадь 10.

200. Обозначим радиус основания цилиндра буквой x, а его высоту — h. Тогда $\frac{h}{R - x} = \frac{H}{R}$, $h = \frac{H(R - x)}{R}$. Выразим площадь боковой поверхности цилиндра S как функцию x: $S = 2\pi x \frac{H(R - x)}{R} = \frac{2\pi H}{R}(Rx - x^2)$. Наибольшее значение S принимает при $x = 0{,}5R$. При этом значении x высота цилиндра $h = 0{,}5H$.

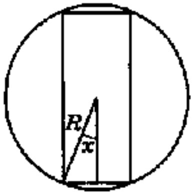


Рис. 137

201. Обозначим буквой x угол (рис. 137), под которым из центра шара виден радиус цилиндра, и выразим объем цилиндра V как функцию x, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $V = \pi(R\sin x)^2 \times$ $\times 2R\cos x = 2\pi R^3 \sin^2 x \cdot \cos x$. Найдем наибольшее значение V на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. $V' = 2\pi R^3 \times$ $\times (\sin^2 x \cos x)' = 2\pi R^3 \cdot (2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) =$ $= 2\pi R^3 \sin x\,(2\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\pi R^3 \sin x(3\cos^2 x - 1)$. На указанном интервале имеется единственный нуль производной, когда $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. В этой точке функция V имеет максимум, который в силу непрерывности функции совпадает с ее наибольшим значением. Заметив, что при этом $\sin^2 x = \frac{2}{3}$ и $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, найдем радиус основания цилиндра: $R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

202. а) В указанном промежутке находится один из корней трехчлена $x^2 + 2x - 3$, равный 1. Вершина соответствующей параболы имеет абсциссу $x_0 = -1$. Рассмотрим два отрезка: $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и $[1; 4]$. На первом из них имеем $y = -x^2 - 2x + 3 +$ $+ \frac{3}{2}\ln x$, $y' = -2x - 2 + \frac{3}{2x}$. $y' = 0$: $-2x - 2 + \frac{3}{2x} = 0$, $4x^2 + 4x -$ $- 3 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -1{,}5$. На $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ функция убывает, ее наибольшее значение равно $1{,}75 + 1{,}5\ln 0{,}5$, а наименьшее — 0. На промежутке $[1; 4]$ имеем $y = (x^2 + 2x - 3) + \left(\frac{3}{2}\ln x\right)$, оба слагаемых возрастают, значит, возрастает и функция y. Наибольшее значение функции на этом промежутке $21 + 3\ln 2$ явно больше, чем ее наибольшее значение на ранее рассмотренном промежутке, а наименьшие значения на этих промежутках совпадают. Значит, наибольшее значение на $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ равно $21 + 3\ln 2$, а наименьшее — 0.

203. а) Нужно сравнить $\frac{1}{e}\ln e$ и $\frac{1}{\pi}\ln \pi$. Найдем точку экстремума функции $y = \frac{1}{x}\ln x$. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0$ при $x = e$. На промежутке $[e; +\infty)$ функция убывает. Поскольку $e < \pi$, имеем $\frac{1}{e}\ln e > \frac{1}{\pi}\ln \pi$. Значит, $e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$.

204. а) Решение 1. Наименьшее расстояние от параболы до прямой измеряется от точки, в которой касательная к параболе параллельна прямой (рис. 138).

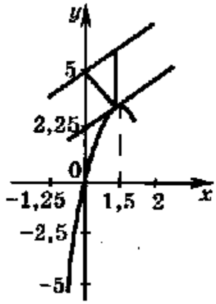


Рис. 138

$$(4x - x^2)' = 1.$$

$4 - 2x = 1$, $x = 1,5$. Искомое расстояние — длина катета, изображенного на рисунке равнобедренного прямоугольного треугольника. Гипотенуза его равна разности ординат точек прямой и параболы с абсциссой 1,5: $1,5 + 5 - (4 \cdot 1,5 - 1,5^2) = 2,75$. Катет этого треугольника найдем умножением на $\cos 45°$: $\frac{2,75\sqrt{2}}{2}$.

Решение 2. Можно заметить, что ближайшая к прямой точка параболы является концом наименьшего из параллельных оси ординат отрезков, соединяющих эти две линии. Длину l этого отрезка легко выразить, как разность ординат соответствующих точек: $l = x + 5 - 4x + x^2 = x^2 - 3x + 5$. Наименьшее значение достигается при $x = 1,5$: $\min l = 2,75$. Остается умножить найденное расстояние на $\cos 45°$.

б) Достаточно рассмотреть $x > 0$. В правой полуплоскости графики симметричны относительно прямой $y = x$. Кратчайший отрезок, соединяющий их точки перпендикулярен этой прямой, а касательные, проведенные через его концы, имеют угловые коэффициенты, равные 1. $(x^2 + 1)' = 1$, $2x = 1$, $x = 0,5$. В силу упомянутой симметрии другой конец отрезка имеет координаты (1,25; 0,5).

Проекция искомого отрезка на ось x равна 0,75, а сам отрезок как гипотенуза соответствующего равнобедренного треугольника равен $0,75\sqrt{2}$.

в) Графики данных функций симметричны относительно прямой $y = x$, значит, кратчайший соединяющий их отрезок перпендикулярен указанной прямой (рис. 139). Касательные, проведенные к графикам в концах этого отрезка, параллельны прямой $y = x$. Мы определяли число e так, чтобы касательная к графику функции $y = e^x$ в точке (0; 1) имела угловой коэффициент 1. Следовательно, один из концов отрезка имеет координаты (0; 1). Поскольку отрезок, соединяющий графики, симметричен относительно прямой $y = x$, координаты другого его конца: $x = 1$,

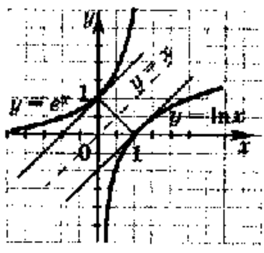


Рис. 139

$y = 0$. По формуле расстояния между точками имеем: $\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$. Ответ: $\sqrt{2}$.

205. $a_6 = a_1 + 5d = 3$, откуда $a_1 = 3 - 5d$. Обозначим произведение $a_1a_4a_5$ через y. Тогда получим $y = a_1 \cdot (a_1 + 3d)(a_1 + 4d) = -10d^3 + 51d^2 - 72d + 27$. $y' = -30d^2 + 102d - 72 = -6 \times (5d^2 - 17d + 12)$. $y' = 0$: $d_1 = 1$, $d_2 = 2{,}4$. Так как по условию $d > 1$, будем исследовать функцию на интервале $(1; +\infty)$. Функция достигает наибольшего значения при $d = 2{,}4$.

211. Банка состоит из оснований радиуса R и боковой стенки высотой h: $S = 2\pi R(R + h)$. Отсюда $h = \dfrac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}$. Объем банки $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot \dfrac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = 0{,}5(SR - 2\pi R^3)$. Найдем наибольшее значение V: $V' = 0{,}5(S - 6\pi R^2)$. При $R > 0$ единственный экстремум — максимум, непрерывная функция V имеет при $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Этот максимум является наибольшим значением V.

Высота соответствующей банки равна $\dfrac{S - 2\pi\frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

П. 11

220. в) Исследуем данную функцию на монотонность и выпуклость, учитывая, что она определена на R. $y' = -2xe^{-x^2}$. $y' = 0$ при $x = 0$. Вторая производная $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \times (2x^2 - 1)$ в этой точке отрицательна, значит, в ней функция имеет максимум.

Вторая производная меняет знак при переходе через точки $x = \pm\sqrt{0{,}5}$ — точки перегиба. На промежутке $(-\sqrt{0{,}5}; +\sqrt{0{,}5})$ значения второй производной отрицательны, следовательно, функция выпуклая, а на промежутках $(-\infty; -\sqrt{0{,}5})$ и $(\sqrt{0{,}5}; +\infty)$ функция вогнутая. Все значения функции положительны, причем $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, т. е. ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика. Ордината точки перегиба равна $e^{-0{,}5} \approx 0{,}6$. Максимум функции 1.

221. б) Исследуем на выпуклость функцию

$$y = x^{\frac{1}{2004}},\ y' = \frac{1}{2004} x^{-\frac{2003}{2004}},\ y'' = -\frac{2003}{2004^2} x^{-1\frac{2003}{2004}}.$$

На всей области определения второй производной она отрицательна, значит, функция выпуклая. У выпуклой функции среднее арифметическое значений функции меньше, чем значение функции от среднего арифметического соответствующих значений аргумента. Значит, $\frac{\sqrt[2004]{0,3} + \sqrt[2004]{0,7}}{2} < \sqrt[2004]{0,5}$.

224. а) Данная функция дифференцируема. Найдем ее критические точки: $y' = 2\ln x + 2 - \ln 49$; $y' = 0$: $2\ln x + 2 - \ln 49 = 0$, $2\ln x = 2\ln 7 - 2$, $\ln x = \ln 7 - 1$, $x = \frac{7}{e}$, $\frac{7}{e} \in [1; 4]$. Найдем знак второй производной в критической точке: $y'' = \frac{2}{x}$. При $x = \frac{7}{e}$ $y'' > 0$. Значит, $\frac{7}{e}$ — точка минимума. Поскольку $\frac{7}{e}$ — единственная критическая точка, в ней функция принимает свое наименьшее значение:

$$\min_{[1;4]} y = 2 \cdot \frac{7}{e} \ln \frac{7}{e} - \frac{7}{e} \ln 49 = \frac{14}{e}\left(\ln \frac{7}{e} - \ln 7\right) = -\frac{14}{e}.$$

б) На указанном отрезке функция дифференцируема. Найдем на нем ее критические точки: $y' = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2} - \ln 2$; $y' = 0$: $\frac{1}{2}\ln x = \ln 2 - \frac{1}{2}$, $\ln x = \ln 4 - 1$, $x = \frac{4}{e}$, $0,5 < \frac{4}{e} < 2$. Найдем знак второй производной в критической точке: $y'' = \frac{1}{2x}$. При $x = \frac{4}{e}$ $y'' > 0$. Значит, $\frac{4}{e}$ — точка минимума. Поскольку это единственная критическая точка, в ней функция принимает свое наименьшее значение:

$$\min_{[1;4]} y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{e} \ln \frac{4}{e} - \frac{4}{e} \ln 2 = \frac{4}{e}\left(\frac{1}{2}\ln \frac{4}{e} - \ln 2\right) = \frac{2}{e}\left(\ln \frac{4}{e} - \ln 4\right) = -\frac{2}{e}.$$

225. При $x = 0$ первая производная данной функции имеет разрыв, значит, в этой точке вторая производная не существует.

П. 12

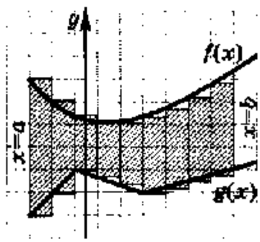


Рис. 140

241. Рассмотрим фигуру (рис. 140), составленную из прямоугольников, основание каждого из которых Δx, а высота находится как разность значений «верхней» и «нижней» функций в точках $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. При $n \to +\infty$ получаем: $S = \lim\limits_{\Delta x \to 0} ((f(x_0) - g(x_0))\Delta x + (f(x_1) - g(x_1))\Delta x + \ldots + (f(x_n) - g(x_n))\Delta x) = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

247. 2) б) Заменим функции, графики которых ограничивают фигуру, на обратные им: $y = x^2$ и $y = \sqrt{8x}$. $V = \int\limits_0^2 8\pi x dx - \int\limits_0^2 \pi x^4 dx$. Можно также использовать формулу объема тела вращения вокруг оси Oy: $V = \int\limits_a^b \pi g^2(y)dy$.

248. Площадь прямоугольника шириной Δx, отстоящего от поверхности воды на x, равна $\frac{l(h-x)}{h}\Delta x$. Давление на глубине x складывается из атмосферного давления P_0 и давления воды P_x. Считая атмосферное давление одинаковым по всей высоте плотины, а давление столба воды высотой x: $P_x = \rho g x$, где ρ — плотность воды, находим силу давления воды на прямоугольник: $(P_0 + P_x)\cdot\frac{a(h-x)}{h}\Delta x$ — слагаемое интегральной суммы. При $\Delta x \to 0$ интегральная сумма стремится к $\int\limits_0^h (P_0 + \rho g x)\cdot\frac{a(h-x)}{h}dx$ — это и есть сила давления воды на плотину.

249. Основание параллелепипеда высотой Δx, отстоящего от вершины пирамиды на x, равно $\frac{S}{H^2}x^2$, а его объем $\frac{S}{H^2}x^2\Delta x$ — это слагаемое интегральной суммы. Объем пирамиды находим как интеграл $\int\limits_0^H \frac{S}{H^2}x^2 dx$.

П. 13

252. Секущая к графику $F(x)$ при $x \to 0$ заключена между секущими к графикам функций $y = x - x^2$ и $y = x + x^2$, и имеет поэтому своим предельным положением прямую $y = x$. Значит, $F'(0) = f(0) = 1$. $F'(x) = f(x) = 1 + 2x \sin \frac{5}{x} + x^2 \cos \frac{5}{x} \cdot \left(-\frac{5}{x^2}\right) =$

$= 1 - 5 \cos \frac{5}{x} + 2x \sin \frac{5}{x}$, при $x \neq 0$. При $x \to 0$ третье слагаемое стремится к нулю, и сумма первого и второго бесконечно колеблется между -4 и 6, т. е. не стремится ни к какому числу. Значит, $x = 0$ — точка разрыва функции $f(x)$.

255. е) Поскольку абсцисса точки A равна $\frac{\pi}{12}$, будем искать первообразную на том промежутке ее области определения, который содержит это число, т. е. на интервале $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$. На нем любая из первообразных задается формулой $F(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$. Подставив в это равенство координаты точки A, найдем значение C: $-1 = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + C$, $C = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$. Искомая первообразная: $F(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x - \frac{2}{3}$, где $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

257. г) Преобразуем дробь:

$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \text{ (рис. 141).}$$

$$S = \int_1^2 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_1^2 (x-1)\,dx + \int_1^2 \frac{dx}{1+x} = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln\,(x+1)\right)\Bigg|_1^2 =$$

$= 2 - 2 + \ln 3 - 0{,}5 + 1 - \ln 2 = 0{,}5 + \ln 1{,}5.$

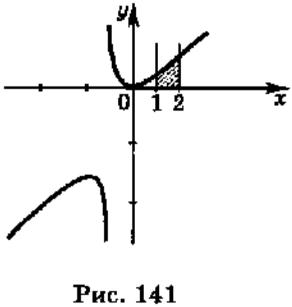


Рис. 141

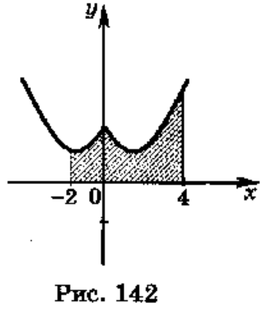


Рис. 142

д) $S = \int_{-2}^{0}(x^2 + 4x + 5)dx + \int_{0}^{4}(x^2 - 4x + 5)dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Big|_{0}^{4} =$

$= \frac{8}{3} - 8 + 10 + \frac{64}{3} - 32 + 20 = 14.$

263. Производная существует при всех $x \neq 0$. Понятно, что при этих значениях x существует $f(x)$. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ может не существовать, однако возможно, что и в этой точке функция существует, просто у нее в ней нет производной (рис. 142). На промежутке $(-\infty; 0)$ $f(x) = \frac{1}{x} + 5$ (см. пример 1). На промежутке $(0; +\infty)$ $f(x) = \frac{1}{x} + C$. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой любой из данных функций, значит, в нуле функция может или не быть определена, или принимать любое значение: $f(x) = \begin{cases} x^{-1} + 5 \text{ при } x < 0, \\ x^{-1} + C \text{ при } x > 0 \end{cases}$ или

$f(x) = \begin{cases} x^{-1} + 5 \text{ при } x < 0, \\ C_1 \text{ при } x = 0, \\ x^{-1} + C_2 \text{ при } x > 0, \end{cases}$ где C, C_1 и C_2 любые числа.

266. 1) Одна парабола получается из другой сдвигом вдоль касательной (рис. 143), поэтому угловой коэффициент a касательной можно выразить через координаты вершин парабол $(-1; 5)$ и $(2; 8)$: $a = \frac{5 - 8}{-1 - 2} = 1$. С другой стороны, угловой коэффициент можно найти как производную функции $g(x) = 8 - (x - 2)^2$: $g'(x) = -2x + 4$, $a = -2x_1 + 4$. Имеем: $-2x_1 + 4 = 1$, $x_1 = 1{,}5$. $y_1 = 8 - (1{,}5 - 2)^2 = 7{,}75$. Аналогично, $f'(x) = -2x - 2$, $-2x_2 - 2 = 1$, $x_2 = -1{,}5$, $y_2 = 5 - (-1{,}5 + 1)^2 = 4{,}75$.

Уравнение касательной: $y = x - 1{,}5 + 7{,}75$, $y = x + 6{,}25$. Найдем абсциссу точки пересечения парабол: $5 - (x + 1)^2 = 8 - (x - 2)^2$, $x = 0$. Теперь искомую площадь можно найти как сумму интегралов:

$S = \int_{-1,5}^{0}(x + 6{,}25 - 5 + (x + 1)^2)dx + \int_{0}^{1,5}(x + 6{,}25 - 8 + (x - 2)^2)dx =$

$= \int_{-1,5}^{0}(x^2 + 3x + 2{,}25)dx + \int_{0}^{1,5}(x^2 - 3x + 2{,}25)dx =$

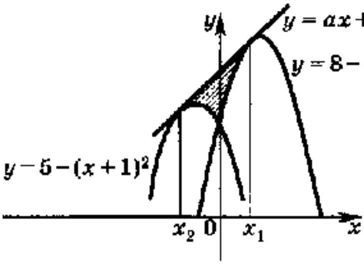


Рис. 143

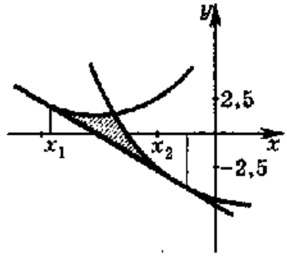


Рис. 144

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 1{,}5x^2 + 2{,}25x\right)\Big|_{-1{,}5}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 + 2{,}25x\right)\Big|_{0}^{1{,}5} =$$

$$= \frac{9}{8} - \frac{27}{8} + \frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{27}{8} + \frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

2) Касательная имеет по одной общей точке с каждой из парабол. Найдем ее, приравняв нулю дискриминанты квадратных уравнений $x^2 + 5x + 7 = ax + b$ и $x^2 - x - 5 = ax + b$.

$x^2 + (5 - a)x + 7 - b = 0,$

$D = 25 - 10a + a^2 - 4(7 - b) = 0,$

$a^2 - 10a + 4b - 3 = 0;$

$x^2 - (1 + a)x - 5 - b = 0,$

$D = 1 + 2a + a^2 + 4(5 + b) = 0,$

$a^2 + 2a + 4b + 21 = 0.$

$\begin{cases} a^2 - 10a + 4b - 3 = 0, \\ a^2 + 2a + 4b + 21 = 0, \end{cases}$ $12a + 24 = 0$, $a = -2$. Подставим значение a во второе уравнение системы $4 - 4 + 4b + 21 = 0$, $b = -\frac{21}{4}$.

Уравнение касательной $y = -2x - \frac{21}{4}$. Абсциссы точек касания найдем из уравнений, дискриминанты которых мы приравнивали нулю: $x_1 = -\frac{5 - a}{2} = -\frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{1 + a}{2} = -\frac{1}{2}$.

Найдем абсциссу точки пересечения парабол: $x^2 + 5x + 7 = x^2 - x - 5$, $x = -2$ (рис. 144). Теперь мы можем найти искомую площадь как сумму интегралов:

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{-2}\left(x^2+5x+7+2x+\frac{21}{4}\right)dx+\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2-x-5+2x+\frac{21}{4}\right)dx=$$

$$=\int_{-\frac{7}{2}}^{-2}\left(x^2+7x+\frac{49}{4}\right)dx+\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x^2+\frac{49}{4}x\right)\Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{-2}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{8}{3}+14-\frac{49}{2}+\frac{7^3}{2^3\cdot 3}-\frac{7^3}{2^3}+\frac{49}{4}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}+$$

$$+\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}=14-\frac{49}{2}+\frac{343}{24}-\frac{1}{24}-2+\frac{1}{2}=2{,}25.$$

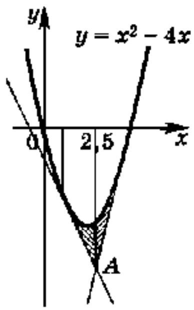


Рис. 145

267. б) Уравнения касательных имеют вид $y=k\left(x-\frac{5}{2}\right)-6$ (рис. 145). Найдем угловые коэффициенты касательных, приравнивая к нулю дискриминант уравнения

$x^2-4x=k\left(x-\frac{5}{2}\right)-6$: $x^2-(4+k)x+\frac{5}{2}k+6=0$,

$D=(4+k)^2-10k-24=0$,

$k^2-2k-8=0$,

$k_{1,2}=1\pm 3$,

$k_1=-2$, $k_2=4$.

Абсциссы точек касания найдем из уравнения

$$x^2-(4+k)x+\frac{5}{2}k+6=0,$$

подставляя в него найденные значения k:

$$x_1=\frac{4-2}{2}=1;\ x_2=\frac{4+4}{2}=4.$$

Теперь найдем искомую площадь как сумму интегралов:

$$\int_{1}^{2,5}(x^2-4x+2(x-2{,}5)+6)dx+\int_{2,5}^{4}(x^2-4x-4(x-2{,}5)+6)dx=$$

$$=\int_{1}^{2,5}(x^2-2x+1)dx+\int_{2,5}^{4}(x^2-8x+16)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Bigg|_{1}^{2,5}+\left(\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right)\Bigg|_{2,5}^{4}=$$

$$=\frac{2{,}5^3}{3}-2{,}5^2+2{,}5-\frac{1}{3}+1-1+\frac{4^3}{3}-4^3+4^3-\frac{2{,}5^3}{3}+$$

$$+4\cdot 2{,}5^2-16\cdot 2{,}5=2{,}25.$$

269. Вблизи точек пересечения с прямой парабола сливается с касательными. С учетом этого задача становится совершенно аналогичной задаче 190 из п. 10 об отсечении треугольника наименьшей площади от угла. Если точка $A(0;\ 1)$ не является серединой отрезка секущей, заключенного внутри параболы, то секущую можно немного повернуть так, чтобы площадь отсекаемой фигуры уменьшилась, а значит, в этом случае площадь не минимальна. Таким образом, точка A должна быть серединой соответствующего отрезка (рис. 146). Отсюда следует, что абсциссы точек пересечения должны быть противоположны. Значит, сумма корней соответствующего квадратного уравнения должна быть равна нулю.

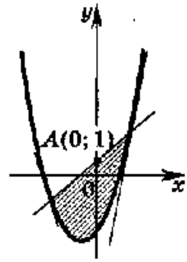


Рис. 146

$x^2 + 2x - 3 = 1 + kx,\ x^2 - (k - 2)x - 4 = 0.$

При этом по теореме Виета $k - 2 = 0$, $k = 2$.

270. б) При $a \in (0;\ 2]$ интеграл противоположен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком подинтегральной функции и прямой $x = a$. Поэтому свое наименьшее значение на этом промежутке он принимает, когда эта площадь наибольшая, т. е. при $a = 2$. При увеличении a значение интеграла будет расти, значит, наибольшего значения нет. Найдем наименьшее значение интеграла:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

275. б) $I_{\text{ср.}} = \dfrac{1}{\pi - 0}\displaystyle\int_0^\pi k \sin t\, dt = -\dfrac{k}{\pi}\cos t\,\Big|_0^\pi = \dfrac{2k}{\pi} \approx 0{,}64k.$

280. Выразим высоту H и радиус основания конуса r (рис. 147):

$$H = Rx,\ r = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

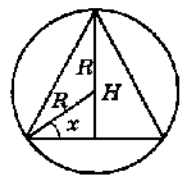


Рис. 147

Объем конуса $V = \dfrac{\pi}{3}hr^2 = \dfrac{1}{3}\pi\,(R + x)(R^2 - x^2)$, $x \in [0;\ R)$. $V' = 0$: при $x = \dfrac{R}{3}$ —

единственная точка экстремума — максимум на $[0; R)$. В этой точке функция $V(x)$ принимает наибольшее значение. Радиус основания искомого конуса $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$, высота $H = \frac{4}{3}R$.

283. Длину уклона s — пройденный путь поезда — можно выразить как интеграл: $s = \int_0^{20}(15 + 0{,}2t)dt = \left(15t + \frac{t^2}{10}\right)\Big|_0^{20} =$ $= 300 + 40 = 340$ (м).

П. 14

286. д) Разделим обе части неравенства на 2, получим: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Заменим $\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответственно на $\cos\frac{\pi}{4}$ и $\sin\frac{\pi}{4}$: $\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$;

и) в неравенстве $\cos^2 x - \cos x < 0$ обозначим $\cos x = y$, тогда $y^2 - y < 0$, $0 < y < 1$. Имеем $0 < \cos x < 1$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$ и $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

287. б) Группируя первый множитель с последним, а второй с третьим, получим: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120$. Обозначив $y = x^2 + 5x + 4$, получим уравнение относительно y: $y^2 + 2y - 120 = 0$, $y_1 = 10$, $y_2 = -12$. Возвращаемся к переменной x: 1) $x^2 + 5x + 4 = 10$, $x_1 = 1$, $x_2 = -6$; 2) $x^2 + 5x + 4 = -12$, $D < 0$, корней нет. Ответ: 1 и -6.

д) Сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6} - \frac{1}{x-1};\ \frac{5x-12}{(x-2)(x-3)} = \frac{5x-12}{(x+6)(x-1)}.$$

Перемножим крайние и средние члены пропорции и получим уравнение вида: $ab = ac$, которое распадается на два уравнения: 1) $5x - 12 = 0$, $x_1 = 2{,}4$; 2) $(x-2)(x-3) = (x+6)(x-1)$, $x_2 = 1{,}2$.

Ответ: 1,2 и 2,4;

е) раскладываем на множители: $3^{x^2}(35 - x) - 5^{2x}(35 - x) = 0$, $(35 - x)(3^{x^2} - 5^{2x}) = 0$. Приравниваем к нулю: 1) $x_1 = 35$; 2) $3^{x^2} = 5^{2x}$, $x^2 = 2x\log_3 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\log_3 5$.

Ответ: 35; 0; $2\log_3 5$;

ж) сгруппируем члены:

$(\cos 9x + \cos 3x) - (\cos 7x + \cos x) = 0,$

$2 \cos 6x \cos 3x - 2 \cos 4x \cdot \cos 3x = 0,$

$(\cos 6x - \cos 4x) \cos 3x = 0,$

$\sin 5x \sin x \cos 3x = 0.$

$x_1 = \frac{\pi}{5} n$, $x_2 = \pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n$, $n \in \mathbf{Z}$. Вторая серия входит в первую, поэтому ее в ответе не записываем.

288. а) Сделаем замену переменных: $t = 2^x$, $t > 0$ и получим новое уравнение $t^2 - 5t - 24 = 0$, $t_1 = -3$ (не удовлетворяет условию $t > 0$) и $t_2 = 8$. Возвращаемся к переменной x: $2^x = 8$, $x = 3$.

б) Перенесем 1 в левую часть и заменим ее, используя основное тригонометрическое тождество, $\cos 2x$ и $\sin 2x$ выразим через $\cos x$ и $\sin x$. Получим после упрощения уравнение, однородное относительно $\cos x$ и $\sin x$: $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$. Разделим почленно на $\cos^2 x$ ($\cos^2 x \neq 0$) и сделаем замену переменных $y = \operatorname{tg} x$, получим: $3y^2 - 2y - 2 = 0$, $y = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Возвращаемся к переменной x: $x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) Сделаем замену переменных $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$, $y \geqslant 0$. Тогда $2x^2 - 6x = 2(y^2 - 6)$. Получаем уравнение относительно y: $2y^2 - 12 + y + 2 = 0$, $2y^2 + y - 10 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{5}{2}$ (не удовлетворяет условию $y \geqslant 0$). Возвращаемся к переменной x: $\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

д) Перейдем во всех логарифмах к основанию 2 и сделаем замену $y = \log_2 x$. Получим уравнение относительно y: $\frac{6}{y} + \frac{4}{2 + y} + \frac{6}{4 + y} = 0$. Корни этого уравнения -3 и -1. Перейдем к переменной x: $\log_2 x = -3$ и $\log_2 x = -1$. Ответ: $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$.

е) Введем новую переменную $t = \sqrt{x - 1}$, тогда $x = t^2 + 1$ и заданное уравнение принимает вид $\sqrt{(t - 2)^2} + \sqrt{(t - 3)^2} = 1$, т. е. $|t - 2| + |t - 3| = 1$. Решением этого уравнения является $2 \leqslant t \leqslant 3$. Отсюда $2 \leqslant \sqrt{x - 1} \leqslant 3$, $5 \leqslant x \leqslant 10$.

з) сделаем замену $y = 3^x$ и получим уравнение $\sqrt{72y - 23} = 2 - 3y$. После возведения в квадрат и упрощения приходим к квадратному уравнению $3y^2 - 28y + 9 = 0$. Его корни $\frac{1}{3}$ и 9.

Второй корень посторонний, так как $2 - 3y \geqslant 0$. Возвращаемся к переменной x и получим $3^x = 3^{-1}$, $x = -1$.

и) Представим $\log_{3x} \frac{3}{x} = \log_{3x}3 - \log_{3x}x = \frac{1}{1 + \log_3 x} - \frac{\log_3 x}{\log_3 x + 1} = \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x}$. Далее имеем: $\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} = 1 - \log_3^2 x$, $1 - \log_3 x = (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x)^2$. Рассмотрим два случая: 1) $1 - \log_3 x = 0$, тогда $x = 3$; 2) $1 - \log_3 x \neq 0$, тогда $(1 + \log_3 x)^2 = 1$, $\log_3 x = 0$ или $\log_3 x = -2$; $x = 1$ или $x = \frac{1}{9}$. Ответ: $\frac{1}{9}$; 1; 3;

к) пусть $t = |x + 1|$, где $t \geqslant 0$. Получим уравнение $t^2 - 4 = 3t$. Единственный неотрицательный корень $t = 4$. Возвращаемся к x: $|x + 1| = 4$, $x_1 = 3$ и $x_2 = -5$.

289. а) Функция $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^t$ убывающая, следовательно, $\frac{2 + x}{1 - x} < \frac{1}{2}$. Решаем данное неравенство методом интервалов и получаем ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

б) Введем новую переменную $t = 5^x$, $t > 0$. Исходное неравенство примет вид $5t^2 - t - 4 > 0$. С учетом $t > 0$ получаем $t > 1$. Следовательно, $5^x > 1$, $x > 0$.

в) Преобразуем и получим $2 \log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1$. Введем новую переменную $t = \log_5 x$. Исходное неравенство примет вид $2t - \frac{3}{t} - 1 < 0$. Решения данного неравенства $t < -1$ или $0 < t < \frac{3}{2}$. Возвращаемся к переменной x и находим $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \sqrt{125})$.

г) Так как $x > 0$, то $\log_{100} x^2 = \lg x$. Обозначив $\lg x$ через y, перепишем данное неравенство в виде $y^2 + y - 2 < 0$. Решениями этого квадратного неравенства служат все значения y из промежутка $-2 < y < 1$. Возвращаемся к x: $-2 < \lg x < 1$, $0{,}01 < x < 10$. Ответ: $0{,}01 < x < 10$.

290. в) Так как левая часть уравнения является возрастающей функцией, а правая — убывающей, то их графики не могут пересекаться более, чем в одной точке, т. е. данное уравнение имеет не более одного корня. Число -2 удовлетворяет уравнению, и, следовательно, является его единственным корнем. Ответ: -2.

г) Функция $y = x^5 + 4x$ является возрастающей, поэтому значение -40 может принять только при одном значении x, равном −2. Следовательно, это единственный корень уравнения.

ж) Подбором находим корень $x = 2$. Чтобы убедиться в единственности корня, разделим уравнение на 5^x и представим его в виде $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Левая часть уравнения задает убывающую функцию, которая свое значение 1 принимает только при $x = 2$.

291. а) Поскольку $\sin 5x \leqslant 1$, $-\cos 2x \leqslant 1$, то левая часть не превосходит 3 и равна 3, только если $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$ Решим второе уравнение, а затем из найденных значений возьмем те, которые являются корнями первого: $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$, $\sin 5x = \sin\left(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ только при $k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Известно, что $\sin x \leqslant 1$, а значения квадратного трехчлена, стоящего справа, при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ больше 1. Значит, при всех x из этого множества выполняется неравенство $\sin x < x^2 + x + 1$. На отрезке $[-1; 0]$ справедливы неравенства $x^2 + x + 1 > 0$ и $\sin x \leqslant 0$, так что и на этом отрезке уравнение корней не имеет.

в) Так как при любом значении переменной левая часть уравнения не больше двух, а правая — не меньше двух (как сумма взаимно-обратных положительных величин), то равенство возможно только тогда, когда одновременно $2\cos\frac{x}{3} = 2$ и $2^x + 2^{-x} = 2$. Система этих двух уравнений с одним неизвестным имеет единственное решение $x = 0$.

г) Поскольку при любом значении переменной левая часть уравнения не больше, а правая — не меньше единицы, то равенство возможно только тогда, когда одновременно $\sin\frac{\pi x}{2} = 1$ и $x^2 - 2x + 2 = 1$. Ответ: 1.

д) Заметим, что $3\sin x + 4\cos 3x\cos x \leqslant 3\sin x + |4\cos 3x \times \cos x| \leqslant 3\sin x + |4\cos x|$, причем равенство в последнем переходе будет только при $|\cos 3x| = 1$. Применяя формулу вспомогательного аргумента, получим, что $3\sin x + |4\cos x| \leqslant 5\sin\frac{\pi}{2} = 5$.

Поскольку $2\sin 5x \leqslant 2$, равенство $3\sin x + 4\cos 3x \cos x + 2\sin 5x = 7$ может оказаться верным только при одновременном выполнении условий $|\cos 3x| = 1$ и $\sin 5x = 1$, что невозможно ни при каком x.

е) Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трехчлен относительно $\cos x$ и найдем дискриминант этого уравнения. $\frac{D}{4} = 4\cos^4 3x - 4\cos^2 3x = 4\cos^2 3x(\cos^2 3x - 1)$. Если x является корнем уравнения, то должно быть $D \geqslant 0$. Поскольку первый множитель неотрицателен, а второй неположителен, имеем: $\cos 3x = 0$ или $\cos 3x = \pm 1$. Если $\cos 3x = 0$, то из формулы корней получим $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — эти значения удовлетворяют уравнению. Если $\cos 3x = \pm 1$, то $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, значения также удовлетворяющие уравнению. Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

292. а) Левая часть неравенства при всех x не больше 1, а правая — не меньше 1. Остается исключить значение x, при котором $\cos x = x^2 + 1$, т. е. $x = 0$. Ответ: $x \neq 0$;

б) для любого x имеем: $\cos x \leqslant 1 \leqslant 1 + |x|$;

в) $\cos x \leqslant 1 < 1 + 2^x$ для любого x, т. е. $\cos x < 1 + 2^x$. Значит, данное неравенство решений не имеет;

г) для любого x имеем $1 + \frac{1}{2 - \sin^2 x} \geqslant 1 + \frac{1}{2} > \cos x$;

д) $\arcsin\frac{2}{x} + \sqrt{x - 1} > 1$. ОДЗ неравенства: $x \geqslant 2$. При этих значениях $\arcsin\frac{2}{x} > 0$ и $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, значит, $\arcsin\frac{2}{x} + \sqrt{x-1} > 1$ при всех $x \geqslant 2$;

е) ОДЗ неравенства $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in Z$). При этих значениях x неравенство принимает вид: $0 < \frac{\pi}{2} + 2\pi n - 12{,}5\pi$, $6\pi < \pi n$, $n > 6$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n принимает все натуральные значения, большие 6.

293. а) Сделаем замену переменных $y = 2x^2 + 3x$. При этом данное уравнение примет вид $y^2 - 7y + 10 = 0$. Решив это уравнение, получим $y_1 = 2$, $y_2 = 5$. Следовательно, множество решений данного уравнения есть объединение множеств решений уравнений $2x^2 + 3x - 2 = 0$ и $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Решив их, получаем $-2{,}5$; -2; $0{,}5$ и 1.

б) Введем обозначение $c = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$. Получим: $c^2 + c - 20 = 0$. Его корни $c_1 = 4$, $c_2 = -5$. Для нахождения x решим уравнение $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = 4$, $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. Уравнение $\sqrt{x^2 + 2x + 8} = -5$ не имеет решений. Ответ: -4 и 2.

в) Запишем исходное уравнение в виде $(3^x)^2 + 3^x \cdot 4^x - 2 \cdot (4^x)^2 = 0$. Получили однородное уравнение второй степени. Разделим уравнение на 4^{2x} и получим $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2 = 0$.

Введем новую переменную $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $t > 0$ и получим уравнение относительно t: $t^2 + t - 2 = 0$. Найдя $t = 1$, а затем и x, запишем ответ: $x = 0$.

г) Так как $4^{\sqrt{x}} = (2^{\sqrt{x}})^2$ и $2^{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}}$, то данное уравнение примет вид $(2^{\sqrt{x}})^2 - \frac{9}{2} \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$. Произведем замену переменной $a = 2^{\sqrt{x}}$, где $a \geqslant 1$. Получим уравнение $a^2 - \frac{9}{2}a + 2 = 0$, корни которого $a_1 = 4$, $a_2 = 0{,}5$. Возвращаемся к x: $2^{\sqrt{x}} = 4$, $x = 4$.

д) Числа $4 + \sqrt{15}$ и $4 - \sqrt{15}$ взаимно обратные, так как их произведение равно 1. Сделаем замену переменных: $y = (4 + \sqrt{15})^x$ и получим уравнение: $y + \frac{1}{y} = 8$. Его корни $y_1 = 4 + \sqrt{15}$ и $y_2 = 4 - \sqrt{15}$. Затем находим значение исходной переменной x: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

з) Введем новую переменную $t = \sin^2 x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда: $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - t)^2$, $\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4t(1 - t)$. Получаем: $5t^2 - (1 - t)^2 = 4t(1 - t)$, $8t^2 - 2t - 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$. Возвращаемся к x: $\sin^2 x = 0{,}5$, $x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

294. в) Подбором находим корень $x = 0$ и, поскольку левая часть убывает, а правая возрастает, убеждаемся, что он единственный.

г) Левая и правая часть уравнения положительны и определены при $x > 0$. Логарифмируя их по основанию 10, получаем $\frac{\lg x + 5}{3} \lg x = \lg x + 1$. Введем переменную $p = \lg x$ и решим уравнение $p^2 + 5p = 3p + 3$. Его корни $p_1 = -3$, $p_2 = 1$. Возвращаемся к переменной x: $x_1 = 0{,}001$, $x_2 = 10$.

295. е) Значения $x - 15$ и $\cos x$ должны быть либо оба положительны, либо оба отрицательны. Тогда получим:

$$\log_3|x - 15| + \log_3|\cos x| = \log_3|x - 15| - \log_3|\cos x|,$$

$$2\log_3|\cos x| = 0, \quad |\cos x| = 1.$$

Имеем: $\begin{cases} \cos x = 1, \\ x - 15 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = -1, \\ x - 15 < 0, \end{cases}$ $x = 2\pi n$, где n принимает все натуральные значения, большие 2, или $x = \pi + 2\pi n$, где n принимает все целые значения, меньшие 2.

к) Левая часть равенства задает функцию $f(x) = \cos x \cos 3x$, периодом которой является число π. Найдем корни данного уравнения на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а затем, использовав четность функции $f(x)$, добавим противоположные им числа и получим корни на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ длиной в период. Исследуем функцию $f(x)$. Производная $f'(x) = -(\sin x \cos 3x + 3\cos x \sin 3x)$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ отрицательна, значит, функция f убывает. А на промежутке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $f(x) \leqslant 0$, т. е. заведомо меньше положительного числа $\cos 0{,}3 \cdot \cos 0{,}9$. Таким образом, на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеется единственный и очевидный корень уравнения, равный 0,3. На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнения имеет два корня: $\pm 0{,}3$. Добавляя периоды, получаем ответ: $\pm 0{,}3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

л) При $|x| > 1$ модуль каждого из трех множителей левой части больше 1, и их произведение не равно 1. Искомые решения следует искать на отрезке $[-1; 1]$, поэтому замена $x = \cos y$ не приведет к потере корней:

$$8\cos y \cos 2y(8\cos^2 y(-\sin^2 y) + 1) = 1,$$

$$8\cos y \cos 2y(-2\sin^2 2y + 1) = 1, \quad 8\cos y \cos 2y \cos 4y = 1.$$

Поскольку значения $y = \pi k$ не удовлетворяют этому уравнению, а, значит, $\sin y \neq 0$, умножим обе части на $\sin y$:

$$\sin 8y = \sin y,\ 7y = 2\pi k \text{ или } 9y = \pi(2k+1),$$

$$y = \frac{2}{7}\pi k \text{ или } y = \frac{1}{9}\pi(2k+1),$$

где $k \in \boldsymbol{Z}$ с учетом того, что $y \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Этим углам соответствуют 7 различных значений косинуса, которые и являются корнями исходного уравнения:

$$\cos\frac{2\pi k}{7},\ k = 1;\ 2;\ 3 \text{ и } \cos\frac{\pi(2k+1)}{9},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

м) Поскольку 0 не является корнем данного уравнения, то, разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное уравнение $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$. Делаем замену переменной $y = 2x + \frac{1}{x}$, получаем уравнение $(y-3)(y+5) = 9$. Корни данного уравнения -6 и 4. Решая уравнения относительно переменной x, получаем корни $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ и $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

н) Поскольку $x = 0$ не является решением данного уравнения, то, разделив обе его части на x^2, получим $x^2 - 2x - 1 - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Группируем члены следующим образом: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$. Делаем замену переменных: $y = x + \frac{1}{x}$ и получаем уравнение относительно y: $y^2 - 2y - 3 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Возвращаясь к переменной x, находим корни исходного уравнения $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

П. 15

298. г) Сначала избавляемся от x в третьем уравнении, вычитая из него сумму первого и второго, затем избавляемся от x во втором уравнении, вычитая из него удвоенное первое, затем избавляемся от y в третьем и, наконец, найдя из третьего значение z, подставляем его во второе, находим y и подставляем в первое:

$$\begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 2x+3y-z=11, \\ 3x-2y+2z=-7; \end{cases} \begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 2x+3y-z=11, \\ -8y+z=-19; \end{cases} \begin{cases} x+3y+2z=1, \\ -3y-5z=9, \\ -8y+z=-19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 24y+40z=-72, \\ -24y+3z=-57; \end{cases} \begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 3y+5z=-9, \\ 43z=-129; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=-3. \end{cases}$$

д) Сложим и вычтем эти два уравнения и получим новую систему:

$$\begin{cases} 2(x-y)=-2, \\ 2xy=12, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ xy=6. \end{cases}$$

$x_1=2,\ y_1=3$ или $x_2=-3,\ y_2=-2$.

е) Сложим и вычтем эти два уравнения и получим новую систему: $\begin{cases} (x+y)^2=16, \\ (x-y)(x+y)=40, \end{cases}$ которая сводится к решению двух систем: 1) $\begin{cases} x+y=4, \\ (x-y)(x+y)=40 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} x+y=-4, \\ (x-y)(x+y)=40. \end{cases}$ Во втором уравнении заменим $x+y$ его значениями и получим системы: $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=10 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=-10. \end{cases}$ Найдем решения систем: $(7; -3)$ и $(-7; 3)$.

299. Находим a и b:

$$\begin{cases} P'(1)=0, \\ P'(3)=0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 3+2a+b=0, \\ 27+6a+b=0, \end{cases} \begin{cases} a=-6, \\ b=9. \end{cases}$$

Значение c находим из условия $P(1)=4$: $1-6+9+c=4$, $c=0$. Теперь найдем $P(3)$: $P(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0$.

300. б) Из первого уравнения находим $2x+3y=\pi k$, а из второго $3x-2y=2\pi n$. Получаем систему $\begin{cases} 2x+3y=\pi k, \\ 3x-2y=2\pi n. \end{cases}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{13}(2k+6n),\ y=\frac{\pi}{13}(3k-4n),\ k\in \boldsymbol{Z},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

301. а) Вычтем из второго уравнения первое и получим новую систему: $\begin{cases} \dfrac{9}{x-y}=\dfrac{9}{4}, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ Отсюда $x-y=4$. Подставим данное значение во второе уравнение системы и найдем, что $x + y = -2$. Получили систему $\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = -2. \end{cases}$ Ответ: (1; −3).

302. а) Ни при каких значениях x и y обе части первого уравнения не обращаются в нуль одновременно, следовательно, можно разделить второе уравнение на первое: $\begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ \dfrac{x + y}{x - y} = 4. \end{cases}$ Из второго уравнения выражаем y: $y = \dfrac{3x}{5}$.

Подставим значение y в первое уравнение и найдем x: $x = 5$. Ответ: (5; 3).

б) Заменим первое уравнение его суммой со вторым, а второе — его разностью с первым: $\begin{cases} x^2y^3 = 8, \\ x^3y^2 = 4. \end{cases}$ Разделив первое уравнение на второе, правая часть которого отлична от нуля, получим $\dfrac{y}{x} = 2$, $y = 2x$. Подставим $2x$ вместо y во второе уравнение: $x^3 \cdot 4x^2 = 4$, $x = 1$. Найдем значение второй переменной: $y = 2$. Ответ: (1; 2);

в) Заменим первое уравнение его суммой со вторым:

$$\begin{cases} x \sin^2 x + x \cos^2 x = y \cos^2 y + y \sin^2 y, \\ x \cos^2 x = y \sin^2 y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ x \cos^2 x = x \sin^2 x. \end{cases}$$

Решаем второе уравнение системы: $x \cos^2 x = x \sin^2 x$, $x = 0$ или $\cos^2 x = \sin^2 x$, $x = 0$ или $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n$. С учетом первого уравнения получаем ответ: (0; 0), $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n\right)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

г) Разделив первое уравнение на второе, получим $\cos x = 2\cos y$. С учетом этого из второго уравнения получаем $\sqrt{3}\cos y = \sin x \cos y + 2\cos y \sin y$. Поскольку $\cos y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению системы, разделим обе части уравнения на $\cos y$.

$$\sqrt{3} = \sin x + 2 \sin y, \ \sin x = \sqrt{3} - 2 \sin y.$$

Возведем обе части в квадрат.

$$1 - \cos^2 x = 4\sin^2 y + 3 - 4\sqrt{3}\sin y,$$

$$1 - 4\cos^2 y = 4\sin^2 y + 3 - 4\sqrt{3}\sin y, \ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

1) $y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\cos y_1 = \frac{1}{2}$, $\cos x_1 = 1$, $x_1 = 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $y_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\cos y_2 = -\frac{1}{2}$, $\cos x_2 = -1$, $x_2 = \pi(2n+1)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Мы возводили уравнение $\sin x = \sqrt{3} - 2\sin y$ в квадрат, поэтому придется сделать проверку, подставив в это уравнение соответствующие значения $\sin x$ и $\sin y$.

$$\sin x_{1,2} = 0,\ \sin y_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0 = \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Посторонних решений нет.

Ответ: $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\pi(2n+1);\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

303. а) Сделаем замену переменной $z = \log_x 2$, $z \neq 0$, и получим новую систему $\begin{cases} 6z + 3y = 24, \\ 2z^3 + y = 8. \end{cases}$ Умножая второе уравнение системы на 3 и вычитая результат из первого уравнения системы, получаем уравнение относительно z: $z(1 - z^2) = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 0$ (посторонний корень). Подставляя найденные значения z, во второе уравнение находим y: $y_1 = 6$ и $y_2 = 10$. Затем находим x, используя формулу замены переменной: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Ответ: (2; 6) и (0,5; 10).

д) Сделаем замену переменных $3^x = a$, $2^{\frac{y}{2}} = b$, получим новую систему $\begin{cases} a^2 - b^2 = 77, \\ a - b = 7. \end{cases}$ Первое уравнение разделим на второе, получим систему $\begin{cases} a + b = 11, \\ a - b = 7. \end{cases}$ Найдем a и b. $a = 9$, $b = 2$. Найдем x и y по формулам замены переменных: $x = 2$, $y = 2$.

304. б) Сделав замену $\sin x = a$ и $\sin y = b$ и выразив все остальные члены через $\sin x$ и $\sin y$ приходим к системе $\begin{cases} 3ab - b^2 = -1, \\ b^2 - 21a^2 = -5. \end{cases}$ Получили однородную систему относительно a и b.

305. а) Делаем замену $x + y = u$, $xy = v$ и получаем систему $\begin{cases} u^2 - 2v - 25, \\ u = 7. \end{cases}$ Откуда $\begin{cases} v = 12, \\ u = 7. \end{cases}$ Далее решаем систему $\begin{cases} xy = 12, \\ x + y = 7 \end{cases}$ относительно x и y. Ответ: (3; 4), (4; 3).

306. е) Обозначим $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=v$, тогда $u^3+v^3=$ $=2$. Имеем:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ u^3+v^3=2; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=2, \\ u^2-uv+v^2=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u+v=2, \\ (u+v)^2-u^2+uv-v^2=3; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=2, \\ uv=1; \end{cases} \quad u=v=1.$$

Возвращаясь к x, получим $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=1$, $x=0$.

з) В уравнении $\sqrt[4]{41-x}+\sqrt[4]{41+x}=4$ обозначим $\sqrt[4]{41-x}=$ $=u$, $\sqrt[4]{41+x}=v$, тогда $u^4+v^4=82$. Получим систему $\begin{cases} u+v=4, \\ u^4+v^4=82. \end{cases}$ Обозначим $uv=z$, тогда $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2z^2=$ $=((u+v)^2-2z)^2-2z^2=(4^2-2z)^2-2z^2$. Подставим полученное выражение во второе уравнение $16^2-64z+4z^2-2z^2=82$, $z^2-32z+87=0$, $z=3$ или $z=29$. Возвращаясь к u и v, получим: $\begin{cases} u+v=4, \\ uv=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} u+v=4, \\ uv=29. \end{cases}$ Вторая система решений не имеет, а значения u из первой системы равны 1 и 3. Возвращаясь к x, получим $\sqrt[4]{41-x}=1$ или $\sqrt[4]{41-x}=3$, $x=40$ или $x=-40$.

307. в) $\begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \lg\dfrac{x}{y}+\lg\dfrac{x}{y}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=8, \\ \dfrac{x}{y}=\sqrt{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} y(\sqrt{10}+1)=8, \\ x=y\sqrt{10}; \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\dfrac{8}{\sqrt{10}+1}, \\ x=\dfrac{8\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}. \end{cases}$$

д) Учитывая, что x и y в системе $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=7, \\ \log_2x+\log_2y=6 \end{cases}$ могут быть только положительными, имеем: $\begin{cases} x^2+y^2=2^7, \\ xy=2^6; \end{cases}$

$(x+y)^2-2\cdot2^6=2^7$, $(x+y)^2=2^8$, $\begin{cases} x+y=2^4, \\ xy=2^6, \end{cases}$ $x=y=8$.

н) Представим первое уравнение системы в виде $\frac{e^x}{\ln x} = \frac{e^y}{\ln y}$ и рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^z}{\ln z}$. Рассмотрим производную этой функции $f'(z) = \frac{e^z}{\ln^2 z}\left(\ln z - \frac{1}{z}\right)$ на промежутке $[3; +\infty)$, поскольку ОДЗ второго уравнения $x \geqslant 3$. При этом $y \geqslant 9$. На указанном промежутке производная $f'(z)$ положительна, значит, функция на нем возрастает. Из равенства значений возрастающей функции следует равенство значений ее аргумента: $x = y$. Получаем $\begin{cases} x = y, \\ y - \sqrt{x-3} = 9. \end{cases}$ Ответ: (12; 12).

о) Обозначим $\operatorname{tg} x = u$, $\operatorname{tg} y = v$, $(uv \neq 0)$. Выразив $\sin 2x$ и $\sin 2y$ через u и v: $\sin 2x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\sin 2y = \frac{2v}{1+v^2}$, получим новую систему $\begin{cases} 10uv = 12 + 12u^2, \\ 10uv = 6 + 6v^2. \end{cases}$ Разделим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе, получим $6u^2 + 5uv - 6v^2 = 0$. Разделим полученное однородное уравнение на v^2 и решим квадратное уравнение относительно $t = \frac{u}{v}$: $6t^2 + 5t - 6 = 0$, $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. Отсюда: 1) $u = \frac{2}{3}v$ или 2) $u = \frac{-3}{2}v$. Подставив эти выражения в уравнение $10uv = 6 + 6v^2$, получим: 1) $\frac{10}{3}v^2 = 3 + 3v^2$, $v^2 = 9$, $v_1 = 3$, $v_2 = -3$. 2) $-\frac{15}{2}v^2 = 3 + 3v^2$, нет решений. Найдем значения u: $u_1 = 2$, $u_2 = -2$. Вернемся к x и y. Ответ: $(\operatorname{arctg} 2 + \pi n;\ \operatorname{arctg} 3 + \pi k)$, $(-\operatorname{arctg} 2 + \pi n;\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi k)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

П. 16

309. а) Решим уравнение относительно x: $ax - 2x = 1$, $x(a-2) = 1$, $x = \frac{1}{a-2}$. Корней нет при $a = 2$.

312. Рассмотрим значения d, близкие к нулю. Заданные условия позволяют построить прямоугольный треугольник с катетами 4 и d, гипотенуза b которого равна $\sqrt{4^2 + d^2} < 5$.

Этот треугольник имеет наибольшую площадь среди всех треугольников со сторонами a и c. Площадь равна $0{,}5 \cdot 4d = 2d$. Значение d можно увеличивать до тех пор, пока $\sqrt{4^2 + d^2} \leqslant 5$, т. е. для всех значений $d \in (0; 3]$. Затем, продолжая брать $a = 4$, $b = 5$ и $c = d$ и увеличивая d, мы будем получать остроугольные треугольники. Их площадь находим по формуле Герона: $\sqrt{p(p-4)(p-5)(p-d)}$, где p — полупериметр треугольника, равный $0{,}5(9 + d)$. Такие треугольники будут иметь наибольшую площадь до тех пор, пока снова не получится прямоугольный треугольник, теперь уже с катетами 4 и 5, т. е. с гипотенузой $c = d = \sqrt{41}$. Дальнейшее увеличение d не приведет к увеличению площади треугольника, так как две его стороны не могут стать больше 4 и 5, соответственно, а наибольшая площадь треугольника со сторонами 4 и 5 равна 10. Таким образом, при $S = 2d$ $d \in (0; 3]$, $S = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-d)}$ при $d \in (3; \sqrt{41})$, где $p = 0{,}5(9 + d)$, $S = 10$ при $d \in [\sqrt{41}; +\infty)$.

313. 1) б) Число 2 является корнем уравнения, если $|2 - a| \times \times 2 + a - 3 = 0$. Если $a \leqslant 2$, то $4 - 2a + a - 3 = 0$, $1 - a = 0$, $a = 1$; 2) если $a > 2$, то $-4 + 2a + a - 3 = 0$, $-7 + 3a = 0$, $a = \frac{7}{3}$.

в) Так как число $x = 2$ является корнем, имеем $(a + 16) \times \times \sqrt{2a + 1} = 0$, $a + 16 = 0$ или $2a + 1 = 0$, $a = -16$ или $a = -0{,}5$. В ОДЗ уравнения входит $a = -0{,}5$.

г) $\sqrt{8 - a} = 4 + a$, $8 - a = 16 + 8a + a^2$, $a^2 + 9a + 8 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = -8$. Проверка оставляет только a_1. 2) $-2 > |2 + 3a| - 4$, $|2 + 3a| < 2$, $-2 < 2 + 3a < 2$, $-4 < 3a < 0$, $-\frac{4}{3} < a < 0$.

315. а) Чтобы уравнение $(0{,}2)^x = \frac{2a - 3}{5 - a}$ не имело корней, должно выполняться неравенство $\frac{2a + 3}{5 - a} \leqslant 0$, $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \cup (5; +\infty)$. Заметим, что $a = 5$ не является допустимым значением.

б) Чтобы уравнение $(0{,}2)^x = \frac{2a + 3}{5 - a}$ имело отрицательные корни, должно выполняться неравенство $\frac{2a + 3}{5 - a} > 1$, $\frac{2a + 3 - 5 + a}{5 - a} > 0$, $\frac{3a - 2}{5 - a} > 0$, $a \in \left(\frac{2}{3}; 5\right)$.

320. б) Так как выражения, стоящие в правой и левой частях уравнения, имеют смысл при $m \neq 1$ и $x \neq -3$, умножаем обе части уравнения на $(m - 1)(x + 3)$ и упрощаем. Получим $(4m - 9)x = 31 - 2m$. При $m \neq \frac{9}{4}$ уравнение имеет корень $x = \frac{31 - 2m}{4m - 9}$. Осталось выяснить, при каких значениях m этот корень допустим, т. е. отличен от числа -3. Решая уравнение $\frac{31 - 2m}{4m - 9} = -3$, находим, что $m = -\frac{2}{5}$. Если $m \neq 1$, $m \neq \frac{9}{4}$, $m \neq -\frac{2}{5}$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{31 - 2m}{4m - 9}$.

При $m = 1$, $m = \frac{9}{4}$, $m = -\frac{2}{5}$ корней нет. Значение $m = 1$ не является допустимым.

321. При любом значении параметра a корни трехчлена $x_1 = 1$ и $x_2 = a - 1$. $x_1^2 + x_2^2 = 1 + (a - 1)^2$. Наименьшее значение, равное 1, сумма квадратов корней принимает при $a = 1$.

322. а) После преобразования получим неравенство $\frac{-3x - 2ax + a^2 + 2a}{a + 2} > 0$, $x \cdot \frac{2a + 3}{a + 2} < a$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x < \frac{a(a+2)}{3+2a}, \\ \frac{a+2}{2a+3} > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > \frac{a(a+2)}{3+2a}, \\ \frac{a+2}{2a+3} < 0. \end{cases}$$

Отсюда находим решение неравенства: $\left(-\infty; \frac{a(a+2)}{2a+3}\right)$ при $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$; $\left(\frac{a(a+2)}{2a+3}; +\infty\right)$ при $a \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$; при $a = -\frac{3}{2}$: нет решений.

324. б) уравнение $a^2x - ax - 2a + 2 = 0$ не имеет корней при $a = 0$ и отрицательном дискриминанте: $a^2 + 4a^2(2a - 2) < 0$, a^2 $(8a - 7) < 0$, $a < 0$, $0 < a < \frac{7}{8}$. Ответ: $a < \frac{7}{8}$.

328. б) Чтобы уравнение $9^x - 3^x + a = 0$ имело единственный корень, квадратное уравнение, к которому оно приводится заменой $3^x = t$, должно иметь единственный положительный корень. Уравнение $t^2 - t + a = 0$ имеет единственный положительный корень: 1) когда его единственный корень положителен, либо 2) когда один корень положителен, а другой 0, либо 3) когда его корни имеют разные знаки. Рассмотрим эти случаи:

1) $D = 0$: $1 - 4a = 0$, $a = 0{,}25$, $t_0 = 0{,}5$ — что удовлетворяет требованию;

2) $t_1 = 0$, $a = 0$: $t_2 = 1$ — удовлетворяет требованию;

3) $a < 0$ — корни разных знаков.

Итак, требованию удовлетворяют $a \leqslant 0$ и $a = 0{,}25$.

329. а) Выразим x^2 из уравнения $\frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = a$: $2x^2 + 3 = ax^2 + a$, $(a - 2)x^2 = 3 - a$, $x^2 = \frac{3 - a}{a - 2}$. Два решения уравнение имеет при $\frac{3 - a}{a - 2} > 0$, т. е. при $2 < a < 3$. Единственное решение при $a = 3$. Нет решений при $a \leqslant 2$ и при $a > 3$.

б) Исследуем функцию $y = \frac{5x^2 + 7}{x^2 + 2}$ на монотонность и экстремумы. Найдем промежутки знакопостоянства ее производной

$$y' = \frac{10x(x^2 + 2) - 2x(5x^2 + 7)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{6x}{(x^2 + 2)^2}.$$

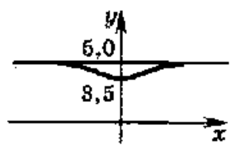


Рис. 148

$y' > 0$ при $x > 0$, $y' < 0$ при $x < 0$. Функция возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и имеет минимум, равный 3,5 в точке 0. Кроме того, график этой функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 5$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 7}{x^2 + 2} = 5$. Схематически график функции приведен на рисунке 148. Следовательно, уравнение не имеет решений при $a < 3{,}5$ и при $a \geqslant 5$, одно решение при $a = 3{,}5$ и два решения при $3{,}5 < a < 5$.

330. а) Дискриминант должен быть положителен, абсцисса вершины соответствующей параболы больше b и значение при $x = b$ больше нуля: $\begin{cases} 1 - 4b > 0, \\ -\frac{1}{2} > b, \\ b^2 + b + b > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} b < \frac{1}{4}, \\ b < -\frac{1}{2}, \\ b < -2 \text{ или } b > 0, \end{cases}$

$b < -2$;

б) значение при $x = b$ должно быть отрицательно: $b^2 + 2b < 0$, $-2 < b < 0$.

331. $dx^2 - 6x + 7 < 0$. При $d \leqslant 0$ требование задачи не выполняется так как есть решения большие, чем 1. При

$d > 0$ вершина соответствующей параболы должна быть левее 1, а значение трехчлена при $x = 1$ — неположительно: $\begin{cases} \frac{3}{d} < 1, \\ d - 6 + 7 \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} d > 3, \\ d \leqslant -1, \end{cases}$ нет решений.

332. а) Поскольку дискриминант положителен, нужно, чтобы абсцисса вершины параболы попала в интервал $(-2; 2)$, и значения трехчлена на границах этого интервала были неотрицательны: $\begin{cases} -2 < b < 2, \\ 4 + 4b - 1 \geqslant 0, \\ 4 - 4b - 1 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < b < 2, \\ b \geqslant -\frac{3}{4}, \\ b \leqslant \frac{3}{4}, \end{cases}$ $|b| \leqslant \frac{3}{4}$.

б) Трехчлен $4x^2 - a^2x - 3a$ должен иметь единственный корень, больший 1. Это может быть в трех случаях: когда дискриминант трехчлена равен нулю, когда корни трехчлена расположены по разные стороны от 1 и когда один из корней трехчлена равен 1, а другой больше, чем 1. Если $D = 0$, то $a^4 + 48a = 0$, $a = 0$ или $a = -\sqrt[3]{48}$. При $a = 0$ корень трехчлена равен 0, что не удовлетворяет требованию. При $a = -\sqrt[3]{48}$ корень трехчлена, равный $\frac{\sqrt[3]{48^2}}{8}$, больше 1, что соответствует требованию. Значение трехчлена при $x = 1$ отрицательно, когда $4 - a^2 - 3a < 0$, $a^2 + 3a - 4 > 0$, $a < -4$ или $a > 1$. При этих значениях a корни трехчлена расположены по разные стороны от 1. Корень трехчлена равен 1 при $a = -4$ или $a = 1$. При $a = -4$ второй корень равен 3, что соответствует требованию, а при $a = 1$ второй корень меньше 1, что не удовлетворяет требованию задачи. Ответ: $a = -\sqrt[3]{48}$, $a \leqslant -4$, $a > 1$.

333. Значения трехчлена на концах отрезка должны быть отрицательны: $\begin{cases} 1 - t + 1 < 0, \\ 4 - 2t + 1 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} t > 2, \\ t > 2{,}5, \end{cases}$ $t > 2{,}5$.

334. Если $c = 0$ имеем корень $x = -1$, удовлетворяющий условию. Если $c \neq 0$, рассмотрим два случая: 1) когда уравнение имеет единственный корень, и он принадлежит данному отрезку; 2) когда уравнение имеет два корня, и лишь один из них принадлежит отрезку. 1) $D = (2c - 1)^2 + 4c = 4c^2 + 1 > 0$, следовательно, данное квадратное уравнение при любом c имеет два корня; 2) чтобы только один из корней принадлежал данному отрезку, значения квадратного трехчлена на его концах могут иметь разные знаки, т. е. их произведение отрицательно: $(c-(2c-1)-1)(c+2c-1-1)<0$, $-c(3c-2)<0$, $c(3c-2)>0$, $c<0$ или $c>\frac{2}{3}$. Один из корней может совпасть с концом отрезка. При этом другой корень отрезку не принадлежит:

$$\begin{cases} c-2c+1-1=0, \\ \frac{1}{c}>1 \text{ или } \frac{1}{c}<-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c+2c-1-1=0, \\ -\frac{1}{c}<-1 \text{ или } -\frac{1}{c}>1. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй находим $c=\frac{2}{3}$. О т в е т: $c<0$, $c\geqslant\frac{2}{3}$.

335. а) Дискриминант трехчлена должен быть положителен, абсцисса вершины параболы должна принадлежать данному отрезку, а значения трехчлена на концах отрезка должны быть неотрицательными. Получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} a^2-8>0, \\ 1<\frac{a}{2}<3, \\ 1-a+2\geqslant 0, \\ 9-3a+2\geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<-2\sqrt{2} \text{ или } a>2\sqrt{2}, \\ 2<a<6, \\ a\leqslant 3, \\ a\leqslant\frac{11}{3}; \end{cases} \quad 2\sqrt{2}<a\leqslant 3;$$

б) при $a=2$: $f(x)=4x+5$ и единственный нуль $x=-\frac{5}{4}$ функции $f(x)$ принадлежит интервалу $(-2;\ 1)$. Следовательно, значение $a=2$ удовлетворяет условию. Пусть теперь $a\neq 2$. Чтобы нули у $f(x)$ существовали, дискриминант квадратного трехчлена $(a-2)x^2+2ax+a+3$ должен быть неотрицателен, откуда $a\leqslant 6$. Понятно, что абсцисса $x_0=-\frac{a}{a-2}$ вершины параболы должна принадлежать интервалу $(-2;\ 1)$. Кроме того, значения квадратного трехчлена на границах интервала $(-2;\ 1)$ должны иметь тот же знак, что и его старший коэффициент.

Получаем систему $\begin{cases} a\leqslant 6, \\ -2<-\frac{a}{a-2}<1, \\ (a-2)(a-5)>0, \\ (a-2)(4a+1)>0. \end{cases}$

Решая ее, находим, что $a<-\frac{1}{4}$, $5<a\leqslant 6$.

336. Точка пересечения соответствующих парабол должна лежать в нижней полуплоскости. $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = x^2 + \frac{6}{a}x - a$,

$\frac{2x}{a} = a$, $x = \frac{a^2}{2}$. Чтобы получить ординату точки пересечения, подставим найденное значение a во второй трехчлен. Его значение должно быть отрицательным:

$$\frac{a^4}{4} + 3a - a < 0,\ a(a^3 + 8) < 0,\ -2 < a < 0.$$

337. Пусть корни первого трехчлена α_1 и α_2, а второго — β_1 и β_2 (оба дискриминанта положительны). Тогда значения параметра, при которых система несовместна (не имеет решений), соответствуют единственному расположению корней: $\alpha_1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \leqslant \alpha_2$.

$$\frac{3a - 3\sqrt{a^2+8}}{4} \leqslant \frac{-a - \sqrt{a^2+8}}{2} < \frac{-a + \sqrt{a^2+8}}{2} \leqslant \frac{3a + 3\sqrt{a^2+8}}{4},$$

$$\begin{cases} 3a - 3\sqrt{a^2+8} \leqslant -2a - 2\sqrt{a^2+8}, \\ 2a + 2\sqrt{a^2+8} \leqslant 3a + 3\sqrt{a^2+8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{a^2+8} \geqslant 5a, \\ \sqrt{a^2+8} \geqslant -5a, \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2+8} \geqslant |5a|,\ a^2 + 8 \geqslant 25a^2,\ a^2 \leqslant \frac{1}{3},\ |a| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ответ: $|a| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$.

338. Нужно, чтобы на границах интервала (1; 2) значения трехчлена были меньше или равны нулю: $\begin{cases} m^2 + 7m + 1 \leqslant 0, \\ m^2 + 8m + 4 \leqslant 0. \end{cases}$

Найдем корни трехчленов $f(m) = m^2 + 7m + 1$ и $g(m) = m^2 + 8m + 4$: $f(m) = 0$, $\alpha_{1,2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; $g(m) = 0$, $\beta_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$. Чтобы установить взаимное расположение найденных корней, изобразим схематически соответствующие

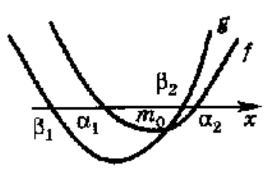


Рис. 149

параболы. Для этого находим координаты их общей точки: $f(m) = g(m)$, $m_0 = -3$; $f(-3) = -11$ и угловые коэффициенты касательных к параболам в этой точке: $f'(m) = 2m + 7$, $f'(-3) = 1$; $g'(m) = 2m + 8$, $g'(-3) = 2$ (рис. 149). Решения системы заполняют отрезок от меньшего корня первого, до большего корня второго члена. Ответ: $m \in \left[-\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}); -4 + 2\sqrt{3}\right]$.

339. а) ОДЗ уравнения — все числа, кроме 3 и −1. На этом множестве данное уравнение равносильно уравнению $(x + a) \times \times (x - 3) + (a - 3x)(x + 1) = 2(x + 1)(x - 3)$. В результате преобразований получаем уравнение $2x^2 + x(1 - a) + a - 3 = 0$. Сумма коэффициентов в уравнении равна нулю, т. е. $2 + 1 - - a + a - 3 = 0$, следовательно, $x_1 = 1$. По теореме Виета $x_2 = 0{,}5(a - 3)$. Таким образом, при любом значении параметра a исходное уравнение имеет корень $x_1 = 1$. Чтобы этот корень был единственным, необходимо и достаточно, чтобы корень x_2 не входил в ОДЗ, т. е. $x_2 = 3$ или $x_2 = -1$, либо чтобы x_2 совпадал с x_1, т. е. $x_2 = 1$. Имеем: если $x_2 = 3$, то $a = 9$; если $x_2 = -1$, то $a = 1$; если $x_2 = 1$, то $a = 5$. Итак, искомые значения параметра a равны 1; 5 и 9. Ответ: 1; 5 и 9.

341. а) Рассмотрим уравнение $2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0$ относительно параметра a, т. е. решим квадратное уравнение $a^2 - (x^2 + x)a + 2x^3 - 2x^2 = 0$, $D = (x^2 + x)^2 - 8x^3 + 8x^2 = = x^2(x - 3)^2$, $a_1 = x^2 - x$, $a_2 = 2x$. Имеем $(a - x^2 + x)(a - 2x) = 0$. Из уравнений $x^2 - x = a$ и $2x = a$ найдем корни $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ и $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$, $x_3 = \frac{a}{2}$ при $a \geqslant -\frac{1}{4}$, $x = \frac{a}{2}$ при $a < -\frac{1}{4}$.

б) Решаем уравнение как квадратное относительно a, его корни $a_1 = x^2 + x$, $a_2 = \frac{x^2}{2}$. Раскладываем левую часть исходного уравнения на множители: $(a - (x^2 + x))\left(a - \frac{x^2}{2}\right) = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$ или $x = \pm\sqrt{2a}$. При $a < -\frac{1}{4}$ нет корней, при $a = -\frac{1}{4}$ один корень $-\frac{1}{2}$; при $-\frac{1}{4} < a < 0$ два корня: $\frac{-1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$; при $a = 0$ три корня: $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$, 0; при $a > 0$ четыре корня: $\pm\sqrt{2a}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$.

342. а) В уравнении $x^4 - 2\sqrt{2}\,x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$ обозначим $\sqrt{2}$ буквой a так, чтобы получить квадратное уравнение относительно a, которое и будем решать: $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$. $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0$, $D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 1 + 4x = (2x + 1)^2$, $a_{1,\,2} = \dfrac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}$. Заменяя a его изначальным значением $\sqrt{2}$, получим: $2x^2 - 2x = 2\sqrt{2}$ или $2x^2 + 2x + 2 = 2\sqrt{2}$, $2x^2 - 2x - 2\sqrt{2} = 0$ или $2x^2 + 2x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$. Корни первого уравнения $x_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$, а корни второго — $x_{3,\,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$.

в) Непрерывная функция $y = 2x^3 + x + \sqrt{2}$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, значит, уравнение $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0$ имеет единственный корень. Обозначим $\sqrt{2}$ буквой a и рассмотрим квадратное уравнение относительно a: $a^2x^3 + a + x = 0$, $D = 1 - 4x^4$, $a_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x^4}}{2x^3}$. Возвращая a его значение $\sqrt{2}$, получим $\sqrt{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4x^4}}{2x^3}$, $(x\sqrt{2})^3 + 1 = \pm\sqrt{1 - 4x^4}$. Применяя в левой части уравнения формулу суммы кубов, а в правой дважды формулу разности квадратов, получим $(x\sqrt{2} + 1)(2x^2 - x\sqrt{2} + 1) = \pm\sqrt{(1 + 2x^2)(1 - x\sqrt{2})(1 + x\sqrt{2})}$. При $x\sqrt{2} + 1 = 0$ обе части равенства обращаются в нуль, значит, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — искомый корень уравнения.

343. а) При любом отрицательном значении a система имеет решение, например, $x = 1$. При $a = 0$ система также имеет решение, тоже $x = 1$. Если $a > 0$, то система может быть записана так $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{a}, \\ x \geqslant 4a, \end{cases}$ и для существования решения необходимо и достаточно выполнение неравенства $4a \leqslant \dfrac{1}{a}$, т. е. $0 < a^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$, $0 < |a| \leqslant 0{,}5$. Окончательно получаем $a \leqslant 0{,}5$.

348. Наибольшее значение функции должно быть не меньше 5, а наименьшее — не больше -6. Свое наибольшее значение функция принимает, когда $\cos x = 0$: $\max y = |a|$. Наименьшее значение функции y такое же, как и у функции $z = a\sin x - 3\cos x = \sqrt{a^2+9}\sin(x+\varphi)$. $\min y = -\sqrt{a^2+9}$. Получаем:

$\begin{cases} |a| \geqslant 5, \\ -\sqrt{a^2+9} \leqslant -6, \end{cases}$ $\begin{cases} |a| \geqslant 5, \\ a^2 \geqslant 27, \end{cases}$ $|a| \geqslant 3\sqrt{3}$.

349. Перейдем к квадратному уравнению $2\sin^2 x - (2a+1)\times \times \sin x + a = 0$ относительно $\sin x$.

а) один корень на указанном интервале данное уравнение имеет тогда и только тогда, когда функция $f(z) = 2z^2 - (2a + 1)z + a$ имеет на промежутке $(0; 1]$ единственный нуль при $z = 1$. Любое другое значение из промежутка $(0; 1]$ синус принимает при двух значениях x из интервала $(0; \pi)$. $f(1) = 0$ при $2 - 2a - 1 + a = 0$, $a = 1$. Второй корень трехчлена f при $a = 1$ равен 0,5. Этот корень входит в промежуток $(0; 1]$, и ему соответствуют два значения x из интервала $(0; \pi)$, что не удовлетворяет требованию единственности корня.

О т в е т: один корень на указанном промежутке уравнение иметь не может.

б) Два корня на указанном промежутке данное уравнение имеет, когда трехчлен $f(z)$ обращается в нуль в одной единственной точке промежутка $(0; 1)$. Это может произойти в трех случаях:

1) $\begin{cases} D = 0, \\ 0 < z_0 < 1, \end{cases}$ 2) $f(0) \cdot f(1) < 0,$ 3) $\begin{cases} f(0) = 0, \\ 0 < z_0 < 1, \\ f(1) > 0. \end{cases}$

Рассмотрим их.

1) $D = (2a + 1)^2 - 8a = (2a - 1)^2$, $D = 0$ при $a = 0{,}5$, $z_0 = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 1}{4} = \frac{1}{2}$. Условие первого случая выполняется при $a = 0{,}5$.

2) $a \cdot (1 - a) < 0$, $a < 0$ или $a > 1$.

3) $a = 0$, $z_0 = \frac{2 \cdot 0 + 1}{4} = 0{,}25$, $2 - 1 > 0$, $a = 0$ удовлетворяет всем требованиям случая 3.

О т в е т: $a \leqslant 0$, $a = 0{,}5$, $a > 1$.

в) Три корня на данном промежутке данное уравнение имеет, если $f(1) = 0$, а другой корень трехчлена f принадлежит интервалу $(0; 1)$. При выполнении задания а) мы увидели, что, данное условие выполняется при $a = 1$. Ответ: $a = 1$.

г) Четыре корня на данном промежутке уравнение имеет тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ имеет на интервале $(0; 1)$ ровно два нуля. Для этого должно быть

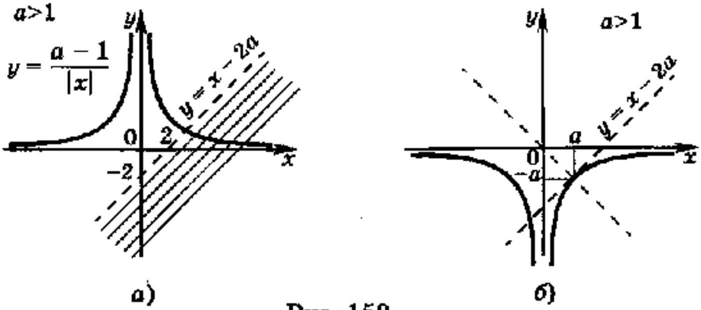


Рис. 150

$$\begin{cases} D > 0, \\ 0 < z_0 < 1, \\ f(0) > 0, \\ f(1) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq 0{,}5, \\ 0 < \dfrac{2a+1}{4} < 1, \\ a > 0, \\ 1 - a > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq 0{,}5, \\ -0{,}5 < a < 1{,}5, \\ a > 0, \\ a < 1. \end{cases}$$

Ответ: $0 < a < 0{,}5$, $0{,}5 < a < 1$.

350. в) Введем новую переменную $x = z + 2a$, что не повлияет на количество корней. Получим уравнение $(x - 2a)\times \times|x| = a - 1$. При $x = 0$ левая часть равенства обращается в нуль, откуда $a = 1$. Однако при этом значении a уравнение имеет еще и корень $x = 2$, что исключает 1 из искомого множества значений a.

При $x \neq 0$ мы можем разделить обе части уравнения на $|x|$: $x - 2a = \frac{a-1}{|x|}$ и решать задачу графически. При любом $a \neq 1$ график правой части уравнения получается из гиперболы, а графиком левой части является прямая, сдвинутая вертикально на $-2a$. На рисунке 150 изображены случаи расположения графиков, удовлетворяющие требованию единственности решения.

На рисунке 150, *а*) при $a > 1$ любая прямая $y = x - 2a$ пересекает график $y = \frac{a-1}{|x|}$ в единственной точке. Значит, все $a > 1$ удовлетворяют требованию задачи.

На рисунке 150, *б*) при $a < 1$ единственную общую точку будут иметь с графиком прямые, расположенные выше касательной. Поскольку гипербола симметрична относительно биссектрисы II и IV координатных углов, прямая $y = x - 2a$ касается гиперболы в точке этой биссектрисы. Отсюда $-a = \frac{a-1}{a}$, $a^2 + a - 1 = 0$, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, прямые

$y = x - 2a$ расположены выше касательной, значит эти значения a удовлетворяют требованию задачи.

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

г) $1 + \{x\} = \cos^2 ax$. При любом значении параметра a число 0 является корнем данного уравнения. Из других значений x равенство возможно только при целых значениях x, в противном случае левая часть равенства будет больше 1, т. е. заведомо больше его правой части. С другой стороны, $\cos^2 ax = 1$ при $x = \frac{\pi n}{a}$, где $n \in \mathbf{Z}$. Значит, $\frac{\pi n}{a}$ не должно быть целым числом, отличным от нуля: $\frac{\pi n}{a} \neq k$. Отсюда $a \neq \frac{n}{k}\pi$. То есть a не должно быть равно произведению π ни на какое рациональное число. $a = \pi s$, где $s \in I$. (I — множество иррациональных чисел.)

П. 17

354. Пусть $B(x;\ x^2)$ точка параболы. Тогда $AB = \sqrt{x^4 + (x-4)^2}$. Наименьшее значение этот корень принимает при том же значении x, что и выражение $x^4 + (x-4)^2$. Найдем это значение x: $(x^4 + (x-4)^2)' = 4x^3 + 2x - 8$; $x^3 + \frac{x}{2} - 2 = 0$.

По формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{217}{216}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{217}{216}} - 1} \approx 1{,}128.$$

Теперь найдем искомое расстояние:

$$AB \approx \sqrt{1{,}128^4 + (1{,}128 - 4)^2} \approx 3{,}14.$$

П. 20

380. $\sin\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -0{,}8$. а) $\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha = 5 \cdot 0{,}6^4(-0{,}8) - 10 \cdot 0{,}6^2(-0{,}8)^3 + (-0{,}8)^5 \approx 1$; б) $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha \approx -0{,}84$;

в) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\sin^3\alpha - 3\cos\alpha} \approx -0{,}376$.

383. При $z = i$ получим: $i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i - i = 0$. Значит, $\left|i + \frac{1}{i}\right| = 0$, отрицательным числом модуль быть не может.

384. $x^2 - y^2 + 2ixy + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, $\begin{cases} 2xy = 0, \\ x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Из первого равенства:

1 случай: $x = 0$, $-y^2 + |y| = 0$; $y = 0$ или $y = \pm 1$.

2 случай: $y = 0$, $x^2 + |x| = 0$; $x = 0$.

Итак, (0; 0); (0; 1); (0; −1).

386. а) $z^3 = 2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$; $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{4} \times$ $\times (\cos(20^\circ + 120^\circ \cdot n) + i\sin(20^\circ + 120^\circ \cdot n))$, где $n = 0, 1, 2$.

Основные формулы

Корни квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0),\ b = 2k$	$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)\ a + b + c = 0$	$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)\ a - b + c = 0$	$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}$
Формулы Виета	
$x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Координаты вершины параболы — графика квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Разложение на множители многочлена n-й степени, имеющего корень x_1
(следствие из теоремы Безу)

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

Свойства корней

квадратных	степени n
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $a \geqslant 0, b \geqslant 0$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geqslant 0, b \geqslant 0$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geqslant 0,\ b > 0$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geqslant 0, b > 0$
$\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$, $a \geqslant 0$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, $a \geqslant 0$
$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$, $a \geqslant 0$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geqslant 0$	

Степени и логарифмы

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ $(b > 0, a > 0, a \neq 1)$
	$a^{\log_a b} = b$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\log_a(b^c) = c\log_a b$, $a \neq 1, a > 0, b > 0$
$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b$, $a \neq 1, a > 0, b > 0, c \neq 0$
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $b \neq 0$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1$
	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $c \neq 1, c > 0, a > 0, b > 0$

Тригонометрия

Некоторые значения тригонометрических функций

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы приведения

α	$\varphi + 2\pi n$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$

Основные тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta))$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Вспомогательный угол

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi),$$

$$\text{где } \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Универсальная подстановка

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Дифференцирование и интегрирование

Функция	Производная	Функция	Первообразная
C	0	C	Cx
x^r	rx^{r-1}	x^r, $r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$ или $\ln(-x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$		
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$ или $-\arccos \frac{x}{a}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		

Окончание табл.

Функция	Производная	Функция	Первообразная
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ или $-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$		

Правила дифференцирования

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x$

Правила интегрирования

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, тогда:

1) функция $F(x) \pm G(x)$ — первообразная функции $f(x) \pm g(x)$;

2) функция $G(x) = kF(x)$ — первообразная функции $g(x) = kf(x)$;

3) функция $G(x) = \frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная функции $g(x) = f(kx+b)$.

Предметный указатель

Учебное издание

Муравин Георгий Константинович
Муравина Ольга Викторовна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

Учебник
для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *О. В. Муравина*
Редактор *Г. Н. Хромова*
Художественный редактор *А. А. Шувалова*
Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *О. И. Колотова*
Корректоры *Г. И. Мосякина*, *Е. Е. Никулина*

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ
знак информационной продукции на данное издание не ставится

Сертификат соответствия
№ РОСС RU. AE51. H 16238.

Подписано к печати 20.02.13. Формат 60 × 90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Усл. печ. л. 14,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 635.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Сайт ООО «Дрофа»: www.drofa.ru

Электронная почта: sales@drofa.ru

Тел.: 8-800-200-05-50 (звонок по России бесплатный)

Отпечатано способом ролевой струйной печати
в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87